

Quoi de plus naturel ?

Marc SAGE
lundi 5 février 2024

quelques références bibliographiques

- 1884, Gottlob FREGE, *Les fondements de l'arithmétique*, trad. et introduction de Claude IMBERT, éd° Seuil (1969)
- 1887, Hermann von HELMHOLTZ, *numbering and measuring from an epistemological viewpoint*, Boston studies in the philosophy of science, vol. XXXVII, ed° Robert S. Cohen & Mark W. Wartofsky (1977), trad. Malcom F. LOWE
- 1888, Richard DEDEKIND, *Que sont et à quoi servent les nombres ?* (recueilli dans *la création des nombres*, intro° trad° et notes par Hourya BENIS SINACEUR, éd° Vrin (2008))
- 1936, Ferdinand GONSETH, *Les mathématiques et la réalité — Essai sur la méthode axiomatique*, chapitre VI « Le nombre entier », éd° Félix Alcan
- tous les écrits de Stella BARUK sur les nombres !

repères techniques

- le théorème #126 de DEDEKIND (forme ensembliste moderne)

$\forall A,$
 $\forall f \in A^A, \forall @ \in A,$
 $\exists ! a \in A^{\mathbb{N}},$
 $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = f(a_n)$
et $a_0 = @$ où l'on a abrégé $n+1 := s(n)$

- les axiomes de PEANO pour l'ensemble $\mathbb{N}$ (muni de son 0 et de ses trois lois $s, +, \cdot$)

« s est une	$n + 0 = n$	$n \cdot 0 = 0$
bijection	$\forall n, a, \quad n + s(a) = s(a+n)$	$n \cdot s(a) = n \cdot a + a$
de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}^*$ »	(addition)	(multiplication)

et, pour chaque énoncé E “à 1 paramètre”, (récurrence)
la conjonction E_0 et $\forall a, [E_a \Rightarrow E_{a+1}]$ implique la généralité $\forall n, E_n$

- l'axiome de l'infini dans ZF (« ensemble des itérés d'un objet par une action »)

Si o dénote un objet et si f dénote une “opération” injective et évitant l'objet o ,
alors il y a un ensemble possédant l'objet o et stable par l'action f

quelques citations

Il y a un fait d'expérience qui conduit au delà du cadre la numérotation pure et simple : c'est qu'ayant à compter, c'est-à-dire à numéroter un groupe d'objets, je puisse à mon gré changer l'ordre et la position de ces objets : je n'en obtiendrai pas moins toujours le même résultat final. Les collections finies possèdent donc un caractère invariant vis-à-vis de toutes les permutations possibles : leur *nombre*. Et il y a un véritable mouvement de la pensée à dire, par exemple, que certains objets sont au nombre de dix, parce qu'ils peuvent être numérotés de un à dix

Les mathématiques et la réalité, F. GONSETH, 1936

Numbering is a procedure based upon our finding ourselves capable of retaining, in our memory, the sequence in which acts of consciousness successively occurred in time.

numbering and measuring, H. v. HELMHOLTZ, 1887

Je l'ai toujours dit : on ne peut pas parler de *tous* les nombres parce qu'il n'y a pas « tous les nombres. »

Remarques philosophiques, L. WITTGENSTEIN, 1930

« Mais ce calcul n'est-il qu'un *usage* ; n'y a-t-il pas également une *vérité* qui corresponde à cette suite ? »

La *vérité*, c'est que le calcul s'est vérifié.

« Veux-tu donc dire qu'"être vrai" signifie être utilisable (ou utile) ? »

Non : j'entends qu'on ne peut pas dire de la série des nombres naturels – non plus que de notre langage – qu'ils sont vrais, mais qu'ils sont utilisables et surtout qu'*ils sont utilisés*.

Remarques sur les fondements des mathématiques, L. WITTGENSTEIN, 1937–44

mathematics may be defined as the subject in which *we never know what we are talking about, nor whether what we are saying is true*

Mysticism and Logic, Bertrand RUSSELL, 1917

Nous devons savoir, nous saurons [*Wir müssen wissen. Wir werden wissen*]

discours radiophonique de David HILBERT à l'attention de la Société des scientifiques et médecins allemands,
Königsberg, 8 septembre 1930

Pourquoi ce qui contraint notre pensée contraindrait-il aussi le cours du monde ?

Logique, mathématiques et connaissance de la réalité, Hans HAHN, 1932

Les entiers : quoi de plus naturel ?

lundi 5 février 2024 16h30-18h30

Lycée Pierre d'Ailly (Compiègne)

1, 2, 3..., 10, 11, ..., $n, n+1, \dots, n^2, n^2+1$, etc.

Autant de manifestations "naturelles" de "*et ainsi de suite*"... pourtant problématiques

1 prélude : trois aspects des entiers

ordinal cit HELMHOLTZ, comptine enfantine, seul l'ORDRE compte. Dire "venir avant/après" plutôt que "être plus petit/grand que" : clarifie $-1 < 10$

cardinal psychologique, humains sont faits pour voir/compter subitement autour de 7 objets (Rainman 257...), au-delà il faut utiliser comptage ordinal.

cit GONSETH : fait d'expérience que le nombre est invariant par permutation

ensemble def originelle EUCLIDE (nombre = arithmos = pluralités composés d'unités?). C'est le *nombre-de* de Stella BARUK (nombre de survivants, 9 de piques, nombre arabes).

Faire "agir" des nombres (abstraits) sur des objets donne des nombres-de (concret) : action concrète de $\mathbf{N}$:)

techniquement traité par J. P. MAYBERRY dans *The Foundations of Mathematics in the Theory of Sets* (2001)

(Rq technique : ce point de vue ne perd en fait RIEN des entiers, au sens où ZF sans infini et PA sont "équivalents" (def $a \in b$ si le a -ième bit de b écrit en binaire vaut 1 ?))

2 horizon naturel de connaissance – sphère primitive

DEF : nombre = propriété de groupes d'objets physiques (*cardinalité*) Basta :)

relater/relier : égale, divise, vient avant

opérer : ajouter, multiplier, exponentier...

habitants/individus : 0, 1, 42

affirmer/raisonner : récurrence domino (chaque voyage de mille lieux a commencé par un pas), plus petit naturel tq (eg 1729 RAMANUJAN)

Pose aucun problème tant qu'on n'en force pas la portée.

On peut déjà parler d'infini *potentiel* (possibilité d'agrandir *indéfiniment*) : la tentation est grande de passer à l'infini *actuel*.

3 sphère idéale : danger métaphysique

histoire perso idéaliser segments de longueur infiniment petite : kaplas recouvrant disque VS infinité de diamètres

De même qu'on idéalise/abstrait en géométrie à partir de lieux indéfiniment précis, on idéalise en arithmétique, ce qui conduit au **DOGME** : il y a un "monde" ($\mathbf{N}, \omega \dots$)

1. peuplé d'"êtres" arithmétiques : 0, 1, 42, un gogol, GRAHAM's number, +petit indice de décimale dans π où apparaît *Hamlet*
2. doté d'une vérité arithmétique *binaire* : Catalan, Goodstein, Fermat, Riemann, Golbach, abc, Syracuse... cit HILBERT no *ignorabimus*

3. soumis à / régi par lois arithmétiques + logique universelle transcendantale : récurrence, pas faux = vrai

Critique :

1. pb d'ontologie : fictions/*croyances*, WITT <<il n'y a pas "tous les nbs">> -> dire CHAQUE au lieu de TOUS!

2. pb d'accès au vrai :

par la vision/*insight*? heureux soient les illuminés, aussi fortement animent-ils l'humanité. Et le commun des mortels? (nos étudiants...)

par la preuve? mais alors la vérité se scinde en 4 : prouvables ou non, réfutables ou non (chq "ou non" provient de vérité binaire primitive). Et fait clairement apparaître les indécidables hors des chimères de vérité

(sur ontologie & vérité : cit blague RUSSELL)

3. pb validité lois + logique : cit HAHN :)

paradoxe BERRY + petit entier naturel non définissable en moins de cent mots

GÖDEL & entiers non standards (un modèle de PA & non-ConsistancePA témoigne de l'inconsistance de PA)

TROIS leçons d'humilité de l'histoire, faisant s'écrouler des mondes idéaux (et partant les gens qui y croient) : il serait temps d'apprendre...

Pythagore & $\sqrt{2}$

KANT et géom non euclidiennes

FREGE & BLV

4 sphère formelle : trois approches des nombres

jeter les visées idéales pour n'en garder que la "coquille", et jouer avec les coquilles (=formes) : individus, opérations, relations

axiomes PA : purement arithmétique. (Rq : formaliser énoncé de récurrence clarifie l'attaque/amorce démonstrative)

dans ZF **axiome infini**, construction lois, def suite des itérés

dans Dedekind : **THE #126**. *Reverse maths* : ça revient au même :) Soutien technique à visée philosophique : nombre = ACTION

question ouverte : comment "capter" les entiers primitif *et uniquement ceux-là*? Semble difficile de faire mieux que **N**... et laisse la place possiblement à d'autres entiers (même si catégorique au 2e ordre, "çed" unique dans ZF)