

# implication VS déduction — ou pourquoi Achille ne rattrapera jamais la tortue

Marc SAGE

mercredi 16 octobre 2019

## 1 un paradoxe

$h$  (hypothèse) : Achille court plus vite que la tortue

$\theta$  (thèse) : Achille rattrape (et dépasse!) la tortue.

*Fait* : si  $h$ , alors  $\theta$ .

Qu'est-ce qui légitime la déduction de  $\theta$  à partir de  $h$ ? Une *loi*, que l'on notera  $\alpha$ , qui dit "de  $h$  on peut déduire  $\theta$ ", énoncée sous la forme d'une *implication*  $h \Rightarrow \theta$  – et qui est valide!

$$\underbrace{h \Rightarrow \theta}_{\alpha}$$

Qu'est ce qui légitime la déduction de  $\theta$  à partir de  $h$  et de la loi  $\alpha$ ? Une loi, notée  $\beta$ , qui dit "de  $h$  et  $\alpha$  on peut déduire  $\theta$ ", énoncée  $h \wedge \alpha \Rightarrow \theta$  :

$$\underbrace{\underbrace{h \Rightarrow \theta}_{\alpha} \Rightarrow \theta}_{\beta} \Rightarrow \theta$$

Qu'est ce qui légitime la déduction de  $\theta$  à partir de  $h$  et de la loi  $\beta$ ? Une loi, notée  $\gamma$ , qui dit "de  $h$  et  $\beta$  on peut déduire  $\theta$ ", énoncée  $h \wedge \beta \Rightarrow \theta$ , à savoir  $h \wedge (h \wedge \alpha \Rightarrow \theta) \Rightarrow \theta$  :

$$\underbrace{\underbrace{h \wedge \underbrace{\underbrace{h \Rightarrow \theta}_{\alpha} \Rightarrow \theta}_{\beta} \Rightarrow \theta}_{\gamma} \Rightarrow \theta}_{\gamma}$$

... d'où des lois  $\delta, \varepsilon$ , etc

$$\dots h \wedge \underbrace{h \wedge \underbrace{h \wedge \underbrace{\underbrace{h \Rightarrow \theta}_{\alpha} \Rightarrow \theta}_{\beta} \Rightarrow \theta}_{\gamma} \Rightarrow \theta}_{\delta} \Rightarrow \theta \Rightarrow \theta \Rightarrow \theta \dots$$

finalement on ne pourra jamais déduire  $\theta$  de  $h$  !

## 2 Jeu

Il y a

1. des situations ( $\parallel$ positions aux échecs)
2. et des actes ( $\parallel$  coups)

3. légitimés par des règles (||mvt des pièces, roque, prise en passant, promotion...)

Quel est le *jeu de la preuve* ? :-)

Situations du jeu : des énoncés (affirmés !), des suppositions (effectuées) ou évocations (effectuées)

**on a... supposons.... soit...**

ACTES DU JEU (on ne décrira pas toutes les règles légitimant ces actes) : à partir d'un certain élément de situation  $A, B, C, \dots, Z$ , pouvoir en écrire un autre  $\alpha, \beta$  (ce qui enrichit la situation). Parmi ces actes, certains permettent d'enrichir les affirmations : ce sont les *déductions*<sup>1</sup> :

$$\frac{A \ B \ C}{(\text{on a}) \ \alpha \ \beta}$$

(|| : à partir d'une configuration de pièces, pouvoir déplacer 1 ou plusieurs pièces hors de / sur l'échiquier)

$$\text{EG} \implies : \quad \frac{h \quad h \implies \theta}{\theta} \text{ (élimin, } modus\ ponens) \quad \frac{\text{Supp. } h \quad \theta}{h \implies \theta} \text{ (intro, très utile en pratique!)}$$

$$\text{EG } \forall : \quad \frac{\text{Soit } o \quad \theta}{\forall o, \theta} \text{ (élimin, } généralisation) \quad \frac{\forall o, P(o)}{P(\omega)} \text{ (intro, } spécialisation) \text{ (où } \omega \text{ objet)}$$

$$\text{EG } \wedge : \quad \frac{A \wedge B}{A} \quad \frac{A \wedge B}{B} \quad \frac{A \quad B}{A \wedge B}$$

CADRE : la *logique propositionnelle*, intéressée non pas par le contenu individuel, le sens, des énoncés mais par la *forme*, leur construction à partir d'énoncés atomiques (d'où de la création d'énoncé). Les connecteurs sont "définis" par leurs règles d'intro/élimin : **sens = usage :-)** Et à ce titre

*une implication  $A \implies B$  est du même type qu'une conjonction  $A \wedge B$*

RQ sournoise : chaque règle  $\frac{A}{B}$  peut de facto être traduite *dans le jeu* par une implication  $A \implies B$  (en effet, une fois affirmée cette dernière, on pourra de  $A$  déduire  $B$  par le MP). Mais la règle  $\frac{A}{B}$  et l'implication  $A \implies B$  sont dans deux mondes bien différentes : règle & situations du jeu !

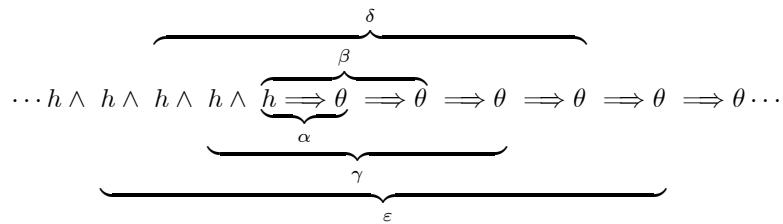
### 3 sortie du paradoxe

Chaque règle-implication  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  est une *règle*, valide, du jeu de la preuve :

$$\frac{h}{\theta} \quad \frac{h \quad \frac{h}{\theta}}{\theta} \quad \frac{h \quad \frac{h \quad \frac{h}{\theta}}{\theta}}{\theta} \quad \frac{h \quad \frac{h \quad \frac{h \quad \frac{h}{\theta}}{\theta}}{\theta}}{\theta} \quad \dots$$

Or si une règle  $R$  qui permet de déduire  $\theta$  est déjà valide, cela ne sert à rien de la transformer en  $\frac{h}{\theta} R$  : elle n'en devient pas plus valide ! Rater ce point permet d'enclencher la régression infinie en itérant  $R \mapsto \frac{h}{\theta} R$  et en partant de la règle  $\frac{h}{\theta}$  qui n'a besoin de personne pour être valide – sinon d'un concepteur du jeu qui la décrétera comme telle. On s'est fait avoir dès qu'on cru que la question « Qu'est-ce qui légitime la déduction de  $\theta$  à partir de  $h$  ? » était sérieuse.

RQ La confusion implications/règles avait aplati ce relief pour donner le "magma"



<sup>1</sup> les autres sont naturellement la *supposition*  $\frac{[\text{rien}]}{\text{supposons } A}$  et l'*évocation*  $\frac{[\text{rien}]}{\text{soit } o}$