

implication VS déduction — ou pourquoi Achille ne rattrapera jamais la tortue

Marc SAGE

mercredi 16 octobre 2019

1 un paradoxe

h (hypothèse) : Achille court plus vite que la tortue

θ (thèse) : Achille rattrape (et dépasse!) la tortue.

Fait : si h , alors θ .

Qu'est-ce qui légitime la déduction de θ à partir de h ? Une *loi*, que l'on notera α , qui dit "de h on peut déduire θ ", énoncée sous la forme d'une *implication* $h \Rightarrow \theta$ – et qui est valide!

$$\underbrace{h \Rightarrow \theta}_{\alpha}$$

Qu'est ce qui légitime la déduction de θ à partir de h et de la loi α ? Une loi, notée β , qui dit "de h et α on peut déduire θ ", énoncée $h \wedge \alpha \Rightarrow \theta$:

$$\underbrace{\underbrace{h \Rightarrow \theta}_{\alpha}}_{\beta} \Rightarrow \theta$$

Qu'est ce qui légitime la déduction de θ à partir de h et de la loi β ? Une loi, notée γ , qui dit "de h et β on peut déduire θ ", énoncée $h \wedge \beta \Rightarrow \theta$, à savoir $h \wedge (h \wedge \alpha \Rightarrow \theta) \Rightarrow \theta$:

$$\underbrace{h \wedge \underbrace{\underbrace{h \Rightarrow \theta}_{\alpha}}_{\beta} \Rightarrow \theta}_{\gamma} \Rightarrow \theta$$

... d'où des lois δ, ε , etc

$$\underbrace{\dots h \wedge \underbrace{h \wedge h \wedge h \wedge \underbrace{\underbrace{h \Rightarrow \theta}_{\alpha}}_{\beta} \Rightarrow \theta}_{\gamma} \Rightarrow \theta \Rightarrow \theta \Rightarrow \theta \Rightarrow \theta \dots}_{\varepsilon}$$

finalement on ne pourra jamais déduire θ de h !

2 Jeu

Il y a

1. des situations (||positions aux échecs)
2. et des actes (|| coups)

3. légitimés par des règles (||mvt des pièces, roque, prise en passant, promotion...)

Quel est le *jeu de la preuve* ? :-)

Situations du jeu : des énoncés (affirmés!), des suppositions (effectuées) ou évocations (effectuées)

on a... supposons.... soit...

ACTES DU JEU (on ne décrira pas toutes les règles légitimant ces actes) : à partir d'un certain élément de situation A, B, C, \dots, Z , pouvoir en *écrire* un autre α, β (ce qui enrichit la situation). Parmi ces actes, certains permettent d'enrichir les affirmations : ce sont les *déductions*¹ :

$$\frac{A \ B \ C}{(\text{on a}) \ \alpha \ \beta}$$

(|| : à partir d'une configuration de pièces, pouvoir déplacer 1 ou plusieurs pièces hors de / sur l'échiquier)

$$\text{EG} \Rightarrow : \quad \frac{h \quad h \Rightarrow \theta}{\theta} \text{ (élimin, } \textit{modus ponens}) \quad \frac{\text{Supp. } h \quad \theta}{h \Rightarrow \theta} \text{ (intro, très utile en pratique!)}$$

$$\text{EG} \forall : \quad \frac{\text{Soit } o \quad \theta}{\forall o, \theta} \text{ (élimin, } \textit{généralisation}) \quad \frac{\forall o, P(o)}{P(\omega)} \text{ (intro, } \textit{spécialisation}) \text{ (où } \omega \text{ objet)}$$

$$\text{EG} \wedge : \quad \frac{A \wedge B}{A} \quad \frac{A \wedge B}{B} \quad \frac{A \quad B}{A \wedge B}$$

CADRE : la *logique propositionnelle*, intéressée non pas par le contenu individuel, le sens, des énoncés mais par la *forme*, leur construction à partir d'énoncés atomiques (d'où de la création d'énoncé). Les connecteurs sont "définis" par leurs règles d'intro/élimin : **sens = usage :-)** Et à ce titre

une implication $A \Rightarrow B$ est du même type qu'une conjonction $A \wedge B$

RQ sournoise : chaque règle $\frac{A}{B}$ peut de facto être traduite *dans le jeu* par une implication $A \Rightarrow B$ (en effet, une fois affirmée cette dernière, on pourra de A déduire B par le MP). Mais la règle $\frac{A}{B}$ et l'implication $A \Rightarrow B$ sont dans deux mondes bien différentes : règle & situations du jeu !

3 sortie du paradoxe

Chaque règle-implication $\alpha, \beta, \gamma \dots$ est une *règle*, valide, du jeu de la preuve :

$$\frac{h}{\theta} \quad \frac{h \quad \frac{h}{\theta}}{\theta} \quad \frac{h \quad \frac{h \quad \frac{h}{\theta}}{\theta}}{\theta} \quad \frac{h \quad \frac{h \quad \frac{h \quad \frac{h}{\theta}}{\theta}}{\theta}}{\theta} \quad \dots$$

Or si une règle R qui permet de déduire θ est *déjà valide*, cela ne sert à rien de la transformer en $\frac{h \quad R}{\theta}$: elle n'en devient pas plus valide ! Rater ce ponit permet d'enclencher la régression infinie en itérant $R \mapsto \frac{h \quad R}{\theta}$ et en partant de la règle $\frac{h}{\theta}$ qui n'a besoin de personne pour être valide – sinon d'un concepteur du jeu qui la décrètera comme telle. On s'est fait avoir dès qu'on cru que la question « Qu'est-ce qui légitime la déduction de θ à partir de h ? » était sérieuse.

RQ La confusion implications/règles avait aplati ce relief pour donner le "magma"

$$\begin{array}{c} \overbrace{\hspace{10em}}^{\delta} \\ \overbrace{\hspace{8em}}^{\beta} \\ \dots h \wedge h \wedge h \wedge h \wedge \underbrace{h \Rightarrow \theta}_{\alpha} \Rightarrow \theta \Rightarrow \theta \Rightarrow \theta \Rightarrow \theta \Rightarrow \theta \Rightarrow \theta \dots \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{\gamma} \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{\varepsilon} \end{array}$$

¹ les autres sont naturellement la *supposition* $\frac{[\text{rien}]}{\text{supposons } A}$ et l'*évocation* $\frac{[\text{rien}]}{\text{soit } o}$