

Calcul et combinatoire

vendredi 25 avril 2025 17h30-19h30

Lycée Pierre D'Ailly (Compiègne)

calcul : petit caillou.

Quand un mouton sort de la bergerie, on met un caillou de côté. Quand ils rentrent, on remet les calculs un par un $\rightarrow$ si différence problème... sans compter :)

En fait calculer *qqch* = la **transformer** en autre chose de **pertinent** selon contexte (développer, factoriser, calculer un groupe...)

souvent vu comme abstrait, compliqué, touffu, difficile.

combinatoire = art de *combiner*, de manipuler des objets. Surtout de les permuter.

Très concret !

objets d'étude des maths = *nombre* et *figures* ??? très discutable vu études anthropologiques sur proto-maths (eg. Olivier KELLER). Notre point de vue pour les nombres : plus primitif est l'*action sur les objets*, les nombres n'en sont qu'une ombre.

cadre : calcul dans les anneaux (commutatifs), çàd manipulation de sommes & produits, dont développement.

but : montrer en quoi calculer EST combiner, afin de rendre le calcul plus ludique, même dans sa technicité.

exemple visé : $\det AB = \det A \det B$ par def polynomiale. Si maîtrisé, aucun pb calcul en prépa :) :) :

PLAN : trois aspects + but :

1. réarranger (rétiqueter)
2. développer
3. réassocier
4. calcul final !

Deux item biblio très généraux (et indépendant de l'exposé) :

1. *Les métamorphoses du calcul*, par Gilles DOWEK, éd. Le Pommier, 2007 Pour lien entre raisonnement et calcul)
2. *A=B*, par Marko PETKOVSEK, Herbert WILF et Doron ZEILBERGER, éd. A K Peters, Ltd., 1996 (disponible en ligne) Pour automatiser le calcul de certaines sommes très générales avec des coef binomiaux

1 réarranger

Eg1 $1 + 2 + \dots + n$. Réécrire dans l'autre sens, additionner, récolter les n .

Techniquement : on réindexe $j := n - i$ et on remplace $i \leftarrow n - j$

+généralismeent :

$$\text{si } \varphi : I \hookrightarrow \underline{\text{inj}}, \text{ alors } \sum_{i \in I} a_{\boxed{\varphi(i)}} = \sum_{\boxed{j} \in \varphi(I)} a_{\boxed{j}}$$

On définit $\boxed{j} := \boxed{\varphi(i)}$ PUIS on remplace alors $i = \varphi^{-1}(j)$: **pas dans l'autre sens !** (cf. reparamétrage dans intégrales : la def est **guidée par ce que l'on souhaite obtenir**)

On change d'*indice* $\rightarrow$ on *ré-indexe*. Aussi re-paramétrage ou re-étiquetage.

EG2 : moyenne géométriques des diviseurs.

Réétiqetage : involution $d \mapsto \frac{n}{d}$.

EG3 $\sum_{\mathfrak{S}_n} \hat{\sigma}$? Sachant : $\hat{\cdot}$ multiplicatif et $= -1$ sur transposition.

Réétiqetage : translation dans un groupe (cf. rotations dans un cercle). Ici on "translate" en composant par une transposition $\rho := \tau\sigma$. $\rightarrow \sum_{\mathfrak{S}_n} \hat{\sigma} = \hat{\tau} \sum_{\rho \in \mathfrak{S}_n} \hat{\rho}$, donc somme cherchée auto-opposée = nulle.

EG4 petit Abel dans groupe abélien (fini) : $|G|g = 0$.

Réétiqetage : translation par g . Alors $\sum_{a \in G} a = \sum_{b \in G} (b + g)$

2 développer

base des anneaux $\lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b$

Combinatoire = découpage rectangle en deux

complexification : $(\lambda + \mu)(a+b)$. Et carrément $(a+b)^n$

Combinatoire = **français** :

pour développer un produit de sommes,
on pioche dans chaque somme-facteur un terme
on multiplie lesdits termes piochés
on somme les produits ainsi obtenus

Pour puissance du binôme $(a+b)^n$, on a des $a^p b^q$, une pioche correspondant à choisir p termes " a " parmi les n facteurs $\rightarrow p$ parmi $n \rightarrow \binom{n}{p}$.

Plus généralement : $\prod_I (a_i + b_i) = \sum_{A \amalg B = I} \prod_A a_i \prod_B b_j$

EG : $\prod (X - \lambda_i) = \dots \rightarrow$ relations de VIÈTE.

EG bis (esquissé) : comparer somme de moy géom et moy géom de sommes, çàd $\sqrt[n]{\prod (a_i + b_i)}$ et $\sqrt[n]{\prod a_i} + \sqrt[n]{\prod b_i}$. Tout développer $\prod (a_i + b_i)$ et regrouper parties selon cardinal, puis minorer à cardinal fixé chaque produit par moy arith associée $\rightarrow$ bien compter les facteurs a_i et b_i , les symétries font apparaître du $\frac{1}{n}$ (d'où la moy géom)

+gen^t $\sum_I (a_i + b_i + c_i) = \sum_{A \amalg B \amalg C = I} \prod_A a_i \prod_B b_j \prod_C c_k$. Mais audelà ?

$$\prod_I \sum_J a_i^j = ?$$

On avait décrit la pioche par un choix de parties "partitionnant" $[1, n]$ (parties vides autorisées) ce qui serait peu exploitable¹. Au lieu de choix de parties, revenir au français : pour chaque somme-facteur, choisir un terme dans ladite somme $\rightarrow$ en codant les sommes et les termes PAR LEURS INDICES², on obtient une **APPLICATION** :

$$\prod_{i \in I} \sum_{j \in J} a_i^j = \sum_{j \in \underline{J}^I} \prod_{i \in I} a_i^{j(i)}$$

cf échange de quantif via axiome du choix :

$$\forall a \in A, \exists b \in B, P_a^b \xLeftrightarrow{\text{AC}} \exists b \in \underline{B^A}, \forall a \in A, P_a^{b(a)}.$$

3 réassocier

exemple concret : "calculer" $s_n := \sum_{i+j=n} \binom{p}{i} \binom{q}{j}$.

Idée algébrique : prendre du recul en manipulation LA SUITE des sommes cherchées, car ces suites tombent dans un cadre algébrique sympa (les polynômes)

$$S := \sum_{n \geq 0} s_n X^n = \sum_n \sum_{i+j=n} \binom{p}{i} \binom{q}{j} X^n = \sum_{(i,j) \in D} \binom{p}{i} \binom{q}{j} X^{i+j}$$

¹ par exemple $\prod_I \sum_J a_i^j = \sum_{j \in \underline{J}} \prod_{A_j = I} \prod_{j \in J} \prod_{i \in A_j} a_i^j$

² comme avec les suites : parler les *termes* est souvent abusif (une suite constante ne prend qu'une seule valeur, donc n'a *stricto sensu* qu'un seul terme!), il convient dans ce contexte de parler des *indices* (lesquels sont, eux, bien en nombre infini)

Le domaine de sommation (amené par le calcul) est un triangle de couples (i, j) : on parle de ce SUR QUOI on somme. Vu maintenant CE QUE l'on somme, il est pertinent de sommer à p constant, çàd en droites verticales (bien sûr q constant est un appel tout aussi légitime). La sommande étant nulle "assez loin", on peut englober triangle dans rectangle (et vice versa) :

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i \geq 0} \sum_{j \geq 0} \binom{p}{i} X^i \binom{q}{j} X^j = \left(\sum_{i \geq 0} \binom{p}{i} X^i \right) \left(\sum_{j \geq 0} \binom{q}{j} X^j \right) \\ &= (1+X)^p (1+X)^q = (1+X)^{p+q} = \sum_{n \geq 0} \binom{p+q}{n} X^n. \end{aligned}$$

Bien prendre le temps de voir dans $\sum_{i \geq 0} \sum_{j \geq 0} a_i b_j$ pourquoi **les parenthèses sont inutiles** :) :) très très pratique

Combinatoire : on découpe un champs en parcelles, on récolte les trésors enfouis dans chaque parcelle, on somme les récoltes partielles :

$$\sum_{d \in D} a_d = \sum_{D = \prod D_i} \sum_{d \in D_i} a_d.$$

DEUX temps :

1. le calcul nous livre *a priori* un certain découpage, d'où *a posteriori* le domaine total (cf. membre de gauche)
2. redécouper ledit domaine (çàd utiliser l'égalité ci-dessus dans le sens indiqué) doit être *guidé par CE QUE l'on somme* ! FUBINI classique (échanger les sommes) est un coup de bol, découper en diagonale peut être utile (cas des polynômes) mais pas que !

(cas pratique : compter un gros porte-monnaie selon les types de pièces)

Avant-gout via les série génératrices de *la combinatoire algébrique*, bien plus vaste.

(EG série gén : tester soi-même pour $\sum_1^n i$. Ou pour les suites géom $g_{n+1} = 2g_n$. Ou pour les relations entre sommes de NEWTON & fonctions symériques élémentaires Possible aussi avec deux paramètres, eg exo concours général mq $\sum_0^p \frac{1}{2^{p+i}} \binom{q+i}{i} + (\text{idem avec } p \leftrightarrow q) = 2$)

4 calcul final

$S := [1, n]$, on part de $|M| := \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_S} \hat{\sigma} \prod_{i \in S} m_{i, \sigma_i}$.

On veut obtenir (chg indice $\mathfrak{S}_n$ dans 2e facteur pour anticiper regroupement)

$$|A| |B| = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \hat{\sigma} \prod_{i \in S} a_{i, \sigma_i} \sum_{\rho \in \mathfrak{S}_n} \hat{\rho} \prod_{i \in S} b_{i, \rho_i} = \boxed{\sum_{\sigma, \rho \in \mathfrak{S}_n} \hat{\sigma} \hat{\rho} \prod_{i \in S} a_{i, \sigma_i} b_{i, \rho_i}}$$

Avanti :

$$|AB| = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_S} \hat{\sigma} \prod_{i \in S} [AB]_{i, \sigma_i} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_S} \hat{\sigma} \prod_{i \in S} \sum_{x \in S} a_{i, x} b_{x, \sigma_i}$$

On développe :

$$= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_S} \hat{\sigma} \sum_{x \in S^S} \prod_{i \in S} a_{i, x_i} b_{x_i, \sigma_i}$$

On réassocie les sommes en factorisant ce qui est indépendant de σ :

$$= \sum_{x \in S^S} \prod_{i \in S} a_{i, x_i} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_S} \hat{\sigma} \prod_{i \in S} b_{x_i, \sigma_i}$$

On aimerait tout à droite réindexer $j := x(i)$, mais x pas forcément injectif. Laissons de côté les non-injectifs pour l'instant (alors x est *bijectif* et $i = x^{-1}(j)$) :

$$= \sum_{x \in \underline{\mathfrak{S}}_n} \prod_{i \in S} a_{i, x_i} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_S} \widehat{\sigma} \prod_{\underline{j} \in S} b_{j, \sigma x^{-1}(j)} \left(+ \sum_{x \text{ non injectif}} \right)$$

On réindexe naturellement $\rho := \sigma x^{-1}$ (alors $\sigma = \rho x$)

$$= \sum_{x \in \mathfrak{S}_n} \prod_{i \in S} a_{i, x_i} \sum_{\underline{\rho} \in \underline{\mathfrak{S}}_S} \widehat{\rho x} \prod_{j \in S} b_{j, \rho(j)}$$

et redistribuer les signatures $\widehat{\rho x}$ donne la somme attendue :)

Reste les x non injectifs. Soit un tel x . Montrons alors la nullité de la contribution $\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_S} \widehat{\sigma} \prod_{i \in S} b_{x_i, \sigma_i}$, ce qui conclura. Soient $s \neq t \in S$ tq $x_s = x_t$ (ok car x non inj), déf. τ la transposition $(s \ t)$. Alors $\underline{x\tau} = x$! Puis on réindexe à la fois $\begin{matrix} j := \tau(i) \\ \rho := \sigma\tau \end{matrix}$:

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_S} \widehat{\sigma} \prod_{i \in S} b_{x_i, \sigma_i} = \sum_{\rho \in \mathfrak{S}_S} \widehat{\tau\rho} \prod_{j \in S} b_{\underline{x\tau}(j), \sigma\tau(j)} = - \sum_{\rho \in \mathfrak{S}_S} \widehat{\rho} \prod_{j \in S} b_{x_j, \rho_j}$$

donc somme auto-opposée = nulle, CQFD.

Lectrice invitée à décrire le polynôme caractéristique $\det(A + tI_n)$ d'une matrice A via calcul combinatoire ! On doit trouver pour coef en t^{n-d} la somme des det des sous-matrices $d \times d$ de A (faire les *sanity checks* pour $d = 0, 1, n$)