

# 1, 2, 3... quoi de plus naturel ?

De l'art de la succession

## citations

### 1. — préliminaires

- 1.1 *sur les entiers “primitifs” : l’apport de Ferdinand GONSETH*
- 1.2 *points de suspension... primitifs ou abusifs ?*
- 1.3 *suite infinie formelle ou liste finie primitive ? Un peu d’hygiène numérique*
- 1.4 *axiomes de l’infini, vers le théorème #126 de DEDEKIND*

### 2. — exemples d’itérations

- 2.1 *quel terme initial ?*
- 2.2 *comment le sens se propage-t-il par récurrence ?*
- 2.3 *suite constante ou suite constante ? un exemple riche d’enseignements*
- 2.4 *applications directes du #126 en terrain concret*

### 3. — mathématique à rebours

- 3.1 *reconstructions des opérations usuelles (et plus...)*
- 3.2 *maths à rebours : axiomatiser les nombres par le #126 ?*
- 3.3 *action d’un monoïde : éclairer les actions de groupes*

### 4. — 1, 2, 3... et au-delà ?

**mots clefs** : successeur, itération, action, reverse maths, DEDEKIND #126, PEANO, GONSETH,

## résumé-présentation

Les nombres (entiers naturels<sup>1</sup>) peuvent être engendrés, dans leur ordre “naturel”, à partir d’un nombre initial et d’une opération singulière<sup>2</sup>, en partant par exemple de 0 et en ajoutant successivement 1. Faisant abstraction de toute considération cardinale ou psychologique, cet aspect itératif des nombres fait primer l’ordinal sur le cardinal et s’illustre pleinement dans le théorème d’existence & unicité de suites définies par une relation de récurrence “simple”, çàd par itération d’une application stabilisant un ensemble donné.

Notre premier propos est de (re)mettre clairement ce théorème formulé par Richard DEDEKIND (au #126 de son ouvrage *Que sont et à quoi servent les nombres* ?<sup>3</sup>) au centre des outils disponibles dès que se présente la récurrence. De notre expérience, les étudiant·es (et les corrigés...) tournent trop souvent autour du pot, que ce soit lors d’énoncés simples en terminale ou bien d’analyse réelle plus poussée en prépa & licence. De nombreux exemples illustreront notre entreprise.

Un second propos, nouveau à nos yeux, est de montrer en quoi *il n’y a en fait pas le choix* : ce théorème #126, en contexte ensembliste, peut être pris comme axiomatisation des nombres entiers. Il s’agira donc d’un résultat de *reverse mathematics* – mathématique à rebours.

Une première conséquence est philosophique et permet de *penser les nombres comme action* : si les réels, depuis les *Principia* de NEWTON, visent à mesurer<sup>4</sup>, les naturels quant à eux

1 dans tout ce qui suit, le terme “nombre” sans autre précision signifiera “entier naturel”

2 Afin d’éviter le barbarisme ‘unaire’ et ses acolytes, l’on voudra bien se rappeler avec Willard Van Orman QUINE dans son *Mathematical Logic* la suite des distributifs latins : ... *quini, quaterni, terni, bini, singuli*. Les hellénistes opteront plutôt pour la suite : ... pentadique, tétradique, triadique, diadique, **monadique**.

3 cf. [Dede18\*\*]

4 Contrairement aux “nombres-actes” (les naturels), les “nombres-mesures” (les réels) sont une *pure fiction*. En pratique, on mesure une longueur en rapportant un certain nombre de fois la longueur étalon – éventuellement subdivisée un certain nombre de fois –, chacun de ces “nombres-de-fois” étant un “nombre-acte” (reporter ou diviser). La mesure se fonde ainsi sur notre *action* et nous n’avons besoin à ce titre pragmatique que d’une infime portion des entiers et des rationnels pour mesurer (les naturels pour *itérer* un acte donné, les rationnels pour le *décomposer* en une succession d’actes plus “fins”). Au risque d’insister, les nombres réels *ne font pas* – quoi que suggère la terminologie ! – partie de la réalité physique. Prétendre les y trouver par un acte de mesure tout en ayant d’une part conscience de la marge d’erreur inhérente à chaque mesure pratique,

servent à *itérer*. Cette action des naturels se généralise aisément aux monoïdes et vient éclairer au passage les “actions de groupes” souvent trop scolairement présentées.

Une seconde conséquence, plus ludique, est la (re)construction des opérations arithmétiques usuelles (et même bien davantage !) à l’aide de cet énoncé #126.

Nous aurons enfin cœur à mettre au jour, d’un point de vue philosophique, davantage l’approche ordinale que celle cardinale. Quelques philosophes nous aideront – Ferdinand GONSETH en tête – à reconstituer des nombres une genèse plus... naturelle.

---

## 1. — préliminaires

### 1.1 sur les entiers “primitifs” : l’apport de Ferdinand GONSETH

Le fond de notre propos philosophique est de prendre conscience, en tant qu’enseignant·es, des croyances que nous véhiculons à nos étudiant·es. Chacun·e est libre par exemple de croire en un monde platoniciens peuplé d’idéautés dont les nombres compteraient parmi les habitants ; infuser inconsciemment cette croyance à des apprenant·es nous paraît toutefois tout autant responsable que de teindre ses discours pédagogiques d’idéologies religieuses. Ces dernières peuvent certes animer et porter des individus dans leurs vies – mais est-ce bien à nous, enseignante·s, d’en décider pour nos étudiant·es ? Bien plus sain à nos yeux de leur fournir des bases moins ambitieuses et – lâchons le mot – moins dogmatiques.

Que proposons-nous donc ? Concernant la mathématique et, bien plus généralement, notre connaissance de la réalité, l’apport du philosophe suisse Ferdinand GONSETH est tout aussi déroutant que, à nos yeux, considérablement important. Sa philosophie – *l’idonéisme* ou *la philosophie ouverte* – dépasse largement la portée de cet article mais constitue la matrice du cadre où nous penserons les nombres : **un cadre fondé dans l’action**. C’est pourquoi nous en esquissons ici les grandes lignes<sup>5</sup>.

« La « crise actuelle des mathématiques et de la logique » est au fond une crise de l’idéal platonicien dans les dernières positions qu’il occupe. Désire-t-on véritablement la dénouer : c’est aux bases mêmes qu’il faut toucher. Il faut faire le sacrifice des notions que nous avons dites « éternellement fixées », des concepts « préalablement et exactement délimités » pour leur substituer les concepts « en devenir » et « ouverts vers leur avenir » »<sup>6</sup>

Cette citation donne le ton gonsethéen : tôt au tard, les idées figées en lesquelles nous croyions fonder notre connaissance doivent être déchues. Ou plutôt : leur caractère figé et mortifère doit être abandonné au profit d’une *vivance* permettant pleine évolution. Remontant cette dernière (la “devenance”), peut-on isoler un commencement ? À défaut, GONSETH nous propose un stade embryonnaire : nous possédons une connaissance « intuitive » et portons des jugements « intuitifs », lesquels sont *sommaires* et *pratiquement sûrs*. Peu importe leur grossièreté, on ne leur demande que d’être efficaces et c’est uniquement leur efficacité qui en jaugera de la valeur :

« Pour savoir, il n’est pas nécessaire de savoir comment on sait. **L’homme dispose de moyens naturels de connaître** qu’il peut mettre en œuvre sans avoir à se contempler lui-même. Sans devoir y réfléchir particulièrement, il est capable d’une connaissance active et étendue. [...]. **Cette connaissance répond à ses fins naturelles : elle est efficace.** »<sup>7</sup>

---

d’autre part connaissance de la densité de **Q** dans **R**, relèverait d’une attitude incohérente. Quel sens pratique par exemple donner à l’incommensurabilité de la longueur du côté d’un carré avec celle de sa diagonale ? à un énoncé tel que « *le rapport des périodes de telle et telle planètes est rationnel* » ? (Le terme *incommensurable* (ancêtre de *irrationnel*) signifie littéralement “sans commune mesure” et pointe l’absence *théorique* d’étalon dont les longueurs considérées seraient chacune un multiple entier.)

5 Dans toutes les citations qui suivent, l’**emphase grasse** est de notre fait.

6 [Gons1936] §8

7 [Gons1945-55] §1

Cette « sphère intuitive » constitue ainsi une véritable matrice de ce que GONSETH appelle « les éléments de la connaissance intuitive » : nous y pouvons *percevoir, juger* et *agir*. Les trois caractères cardinaux de cette forge intuitive sont :

- 1) le *pratiquement assuré* ;
- 2) le *sommaire* ;
- 3) l'*en-devenir*.

« L'affirmation :

b) Il faut tenir pour existante et pour efficace une certaine concordance entre nos idées et les choses qu'elles ont pour objet [...] pas que notre connaissance des idées, des choses et de leur adéquation réciproque ait dépassé le stade embryonnaire où la convenance (même relative) et le succès (même provisoire) sont les seuls critères. Nous acceptons que cette connaissance soit encore sommaire. Que nous ne sachions nous en faire encore qu'une image informe et sans contours définis. Qu'elle soit provisoire et rien de plus qu'une ébauche encore inachevée.

Mais nous affirmons en même temps que **les premières assises de toute notre connaissance ont un caractère analogue. Et si, pour commencer, nous faisons appel à ces notions grossières et primitives, à ces idées d'une justesse sommaire, à ces connaissances toutes brutes et d'une exactitude abrégée, c'est que nous voulons garder le contact le plus étroit possible avec les faits dont nous sommes pratiquement sûrs. Leur « contenu de réalité » est suffisamment dense pour que, si on ne les emploie pas en dehors de leur cadre naturel, leur interprétation et leur signification soient pratiquement immédiates.** »<sup>8</sup>

« Tout cet amas de connaissances fondamentales et imparfaites ; toutes ces vues justes, mais seulement de façon approchée ; toutes ces idées inachevées sur lesquelles s'exerce notre activité mentale, nous voulons les appeler *les éléments de la connaissance intuitive*.

[...]

[...] toute [l'imprécision de la définition précédente] ne l'empêche pas d'être opérante, adéquate, efficace, – entre certaines limites naturellement. **Et nous n'en exigeons pas davantage.** »<sup>9</sup>

Nous nous arrêtons ici pour le cadre général.

Concernant les nombres, auquel GONSETH consacre le chapitre VI de [Gons1936], nous remarquerons avec lui que « [l]a notion de nombre se fonde sur une faculté de notre être mental : celle d'enregistrer la répétition d'une impression sensorielle, d'une action ou même d'une intention, en un mot d'enregistrer la répétition d'un moment de conscience. La façon la plus abstraite de concevoir un moment de conscience de ce genre correspond peut-être à la notion de *bi-unicité*, notion sur laquelle BROUWER fonde l'intuition des nombres, et qu'on pourrait apercevoir « réalisé » dans l'instant fugitif où une impression fait place à son souvenir. »<sup>10</sup>

Le rappel explicite à Jan BROUWER, à la conscience, ainsi qu'à la mémoire itérée, nous rappelle fortement l'approche d'Hermann VON HELMHOLTZ, pour qui « [n]umbering is a procedure based upon our finding ourselves capable of retaining, in our memory, the sequence in which **acts of consciousness successively occurred in time** »<sup>11</sup>.

Il est singulier que ni GONSETH ni HELMHOLTZ n'abordent de front l'*objet*-nombre mais décrivent plutôt l'*acte*-nombrer (compter). Ce n'est que par notre action que l'accès au concept-nombre nous est révélé :

---

8 [Gons1936] §3

9 [Gons1936] §5

10 [Gons1936] §41

11 [Helm1887] p. 75.

« on ne sait compter un certain nombre d'objets que si l'on sait aussi les placer dans un certain ordre de succession, où chaque objet n'intervienne qu'une fois. [...] cet ordre doit être porté par l'esprit dans la catégorie à énumérer.

[...] Il y a un fait d'expérience qui conduit au delà du cadre la numérotation pure et simple : c'est qu'**ayant à compter, c'est-à-dire à numéroter un groupe d'objets, je puisse à mon gré changer l'ordre et la position de ces objets : je n'en obtiendrai pas moins toujours le même résultat final. Les collections finies possèdent donc un caractère invariant vis-à-vis de toutes les permutations possibles : leur nombre.** Et il y a un véritable mouvement de la pensée à dire, par exemple, que certains objets sont au nombre de dix, parce qu'ils peuvent être numérotés de un à dix.

On pourrait dire aussi que la notion de nombre cardinal est fondée sur la possibilité d'établir entre les nombres ordinaux et les objets d'une catégorie finie une correspondance parfaitement univoque et qui se conserve à travers tous les dérangements et objets envisagés. **Cette possibilité contient un fait d'expérience irréductible.** D'ailleurs, il faut aussi observer que l'on ne nomme « objets » que les « choses » qui présentent la propriété donc il est question, de telle sorte que les notions d'objet et de nombre apparaissent liées dans l'intuitif. »<sup>12</sup>

Ainsi est posée, dans l'intuitif, la primauté du nombre ordinal sur celui cardinal, rappelant des conclusions semblables d'Hermann WEYL<sup>13</sup>. Finalement, le nombre (cardinal) se verra simplement décrit, dans l'intuitif, comme une qualité intuitive (la cardinalité) d'un groupe d'objets :

« En définitive, le nombre apparaît au stade intuitif comme un caractère porté par l'esprit dans un ensemble très complexe d'impressions plus ou moins nettement perçues, résultant de l'action de l'objet sur le sujet et de l'emprise du sujet sur l'objet. **Ce caractère est unificateur et schématisant, et merveilleusement approprié aux fins de l'action. Il est comparable à toute autre qualité sensible**, telle que grand, jaune, ou pesant. Un groupe d'objets a la *qualité* « trois », par exemple, comme l'un d'eux a peut-être la *qualité* « rouge » ou la propriété « d'être transparent ».

En un mot : **Le nombre, dans sa signification primitive et dans son rôle intuitif, est une qualité physique des groupes d'objets.** »<sup>14</sup>

## 1.2 points de suspension... primitifs ou abusifs ?

Les points de suspension « ... » sont souvent utilisés à des fins de lisibilité, par exemple dans le titre de cet article, dans les termes  $1 + 2 + \dots + 9$  ou  $(1+1/5^2)(1+1/6^2) \dots (1+1/333^2)$ , deux écritures bien plus « parlantes » que  $\sum_{i=1}^9 i$  ou  $\prod_{i=5}^{333} (1+1/i^2)$ . Ces points signifient simplement « *et ainsi de suite* » voire « *et ainsi de suite jusqu'à* », laissant ainsi à la lectrice l'entière liberté et responsabilité d'interpréter ces derniers, de deviner le schéma qu'ils suggèrent – schéma dévoilé ci-dessus dans les écritures dites *implicites*<sup>15</sup> mettant en jeu les opérateurs  $\sum$  ou  $\prod$ .

Cette interprétation recèle toutefois des subtilités<sup>16</sup> que nous nous proposons de mettre au jour. La sphère primitive y jouera un rôle essentiel, ainsi que le statut spécifique des symboles  $n$  apparaissant dans les formulations « Soit  $n$  un nombre ».

Prenons le temps de considérer les huit définitions suivantes :

12 [Gons1936] §41

13 « The question has been argued extensively whether the concept of cardinal, rather than ordinal, number is not the primary one. [...] but the criterion of numerical equivalence makes use of the possibility of pairing, which can only be ascertained if the **acts** of correlation are **carried out** one after another **in temporal succession** and the elements of the sets themselves are thereby arranged in order. » Cf. [Weyl1926], p. 34 (**emphase grasse** de notre fait).

14 [Gons1936] §42

15 Par contraste avec une écriture implicite comme  $\cup_{a=1}^6 \{a\}$ , on dira souvent que  $\{1, 2, \dots, 6\}$  en est une écriture *explicite* – au sens précis où l'on a fait disparaître le symbole muet et son opérateur associé (appelé *mutificateur* par René CORI). C'est bien sûr un abus de langage car il reste encore des implicites, à savoir les « ... ». Une écriture *complètement explicite* serait  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .

16 Il s'agit de bien autre chose que les erreurs d'inattention de la forme  $(1+2+\dots+9)+1 = 1+2+\dots+(9+1) = 1+2+\dots+10$ , facilement évitables en contrôlant le nombre de termes ou en « implicitant » les sommes à l'aide de mutificateurs.

- ① On définit  $\llbracket 1, 9 \rrbracket := \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ .
- ② Abrégeons  $\llbracket 1, 20 \rrbracket := \{1, 2, \dots, 20\}$ .
- ③ On note  $\llbracket 1, 10^{80} \rrbracket := \{1, 2, \dots, 10^{80}\}$ .
- ④ Définissons  $n := 3 + 3 + 3 + 3$  puis nommons  $\llbracket 1, n \rrbracket := \{1, 2, \dots, n\}$ .
- ⑤ Soit  $n \in \mathbb{N}$  et notons  $\llbracket 1, n \rrbracket := \{1, 2, \dots, n\}$ . Montrons alors que  $\llbracket 1, n \rrbracket$  est de cardinal  $n$ .
- ⑥ Pour chaque nombre<sup>17</sup>  $\alpha$ , on définit  $\llbracket 1, \alpha \rrbracket := \{1, 2, \dots, \alpha\}$ .
- ⑦ *Définition* : Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On appelle  $n$ -ième segment initial la partie  $\llbracket 1, n \rrbracket := \{1, 2, \dots, n\}$ .
- ⑧ On notera  $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$ .

① La première est limpide : tout est explicite, le *definiens* étant décrit exhaustivement par extension.

② La seconde fait apparaître des points de suspension, lesquels sous-entendent la possibilité de les remplacer selon quelque schéma qui serait à deviner d'après les premiers et dernier éléments. Cette possibilité est clairement réalisable :

$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\},$

et montre que le nombre 20 tombe pleinement dans la sphère primitive<sup>18</sup>.

③ Les points de suspension du 3<sup>e</sup> exemple ont l'air du même genre... Toutefois leur explicitation n'est pas de notre ressort humain – ne serait-ce parce quelques atomes d'encre seront nécessaires pour écrire chaque élément et que le nombre de particules dans l'univers serait de l'ordre de  $10^{80}$ . *Nous sortons ainsi clairement de la sphère primitive*, tout en restant pourtant dans le fini. Le *definiens*  $\{1, 2, \dots, 10^{80}\}$  n'a plus de référent, même s'il "pensait" en viser un par analogie avec le précédent  $\{1, 2, \dots, 20\}$ . Il conviendra donc de trouver une autre définition du segment  $\llbracket 1, 10^{80} \rrbracket$ .

④ La définition de  $n$  est limpide : une fois le *definiens*  $3 + 3 + 3 + 3$  (calculé et) substitué au *definiendum*  $n$ , nous retombons exactement deux cas plus haut. La définition<sup>19</sup> de  $n$  ajoute ici une couche sans importance aucune.

⑤ Ce cinquième exemple aborde un tout autre plan et nous confronte à notre usage de la formulation « Soit un objet », acte que nous appellerons une *évocation*<sup>20</sup>.

Dans un tel contexte de démonstration, une telle évocation ne vise qu'à une chose : *établir une généralité* (en l'occurrence :  $\forall \alpha \in \mathbb{N}, \text{Card} \llbracket 1, \alpha \rrbracket = \alpha$ ). Le symbole  $n$  apparaissant dans l'évocation « Soit  $n \in \mathbb{N}$  » a par conséquent un usage bien déterminé, ce qui le typifie **à part des individus et de leurs composés** – ces derniers comprenant le premier nombre 0, le successeur 1 (de 0), les successeurs primitifs 2, 3, 4, ..., 20, la somme  $4 + 7$ , le produit  $3 \times 15$ , la puissance  $20^{20}$ , et même les factorielles de tout ceux qui précèdent car les nombres (nous l'avons vu avec  $10^{80}$ ) n'ont pas vocation à s'enfermer dans le primitif. Comme l'usage d'un tel  $n$  est de *pouvoir être évoqué*, nous le qualifierons de (symbole d'objet) *évocable*<sup>21</sup>.

Ce statut peut sembler bâtard entre la "variable" et la "constante" : un tel  $n$ , en effet, d'une part *pourra varier AU FUTUR* une fois qu'on lui appliquera l'énoncé apparaissant dans la généralité à établir, d'autre part *reste "constant"* (au même sens que 2 ou  $\pi$  serait "constant", quoi que cela veuille dire) le temps que l'on établisse l'énoncé que l'on souhaite prouver en toute généralité. Toutefois, en renversant la perspective, ne serait-ce pas plutôt la "variable" qui a le cul entre deux chaises, jouant tantôt le rôle d'évocable, tantôt le rôle de quantifiable (le 3<sup>e</sup> type de symbole d'objet) ?

17  $\alpha$  comme le grec *arithmos* (nombre)

18 dans le doute, regarder au bout de ses doigts & pieds

19 « Il faut voir les définitions [...] comme des conventions superflues d'abréviations notationnelles. [...] La forme dans laquelle on exprime une définition est sans importance, tant qu'elle indique la manière de l'éliminer. » (cf. [Quin1980], p. 126 (essai V « Nouveaux Fondements pour la logique mathématique »))

20 au sens du verbe *évoquer*, « [a]ppeler, faire apparaître par la magie » ([première acception du CNRTL](#)), par analogie avec la magie du décret biblique « Que la lumière soit ! ». Un collègue (Philippe LE MOULT) proposait le vocabulaire moins mystique de *commande*, au sens de *commander une pizza*, rappelant que l'objet commandé échappe complètement à notre contrôle (selon *qui* cuisine, avec *quoi*, dans *quelles* conditions...) et est *quelconque* en ce sens. L'unique contrôle, le seul ACTE en notre pouvoir est de passer commande ou non.

21 voir par exemple les pdfs de notre atelier [Pour une grammaire conviviale en mathématique](#) animé aux journées de l'APMEP à Rennes le dimanche 23 octobre 2023 (atelier D1-21)



Acter pleinement le rôle fondamental joué dans les preuves par l'évocation, au titre aussi important que l'affirmation ou la supposition, nous paraît aussi simple qu'essentiel pour démêler la définition ⑤. Si  $n$  était un composé d'individus, nous retomberions dans les cas précédents, la question de pouvoir expliciter les « ... » dépendant alors de la situation de  $n$  par rapport à la sphère primitive. *Dans le cas d'un évocable, la question est immédiatement tranchée : impossible d'expliciter*, quand bien même nous le ferions dans notre tête pour divers valeurs primitives de  $n$ .

⑥ La situation est analogue : le symbole  $\alpha$  étant ici *muet*, pas possible d'expliciter  $\{1, 2, \dots, \alpha\}$  par extension. (Bien sûr, cela serait possible APRÈS remplacement de  $\alpha$  par un nombre primitif – mais nous serions alors *en aval* de la définition globale considérée.)

⑦ L'intention est la même qu'au cas ⑥ (définir), seuls en diffèrent les moyens.

Quel sens cependant aurait une évocation *hors cadre démonstratif*? Quelle généralité serait donc à établir dans ce contexte explicite de définition? Eh bien : aucune – il n'y a rien à établir dans une définition ! Il y a en revanche à *définir*, et ce *suivant un certain schéma général*<sup>22</sup> : les « conventions superflues d'abréviations notationnelles » sont ici de décoder « Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Alors bla bla... » en « Pour chaque  $n \in \mathbb{N}$ , bla bla », cette dernière forme se risquant à davantage de lourdeur du fait des simples contraintes grammaticales. C'est donc par pure praticité de maniement de la langue<sup>23</sup> que des évocations peuvent apparaître en contexte définitionnel – ce contexte permettant justement de les distinguer les évocations démonstratives.

⑧ Finissons par la magnifique “définition” : «  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  ». Si ces points de suspension – les premiers sans clôture – suggèrent une ouverture vers l'illimité et signifient bien par là *la stabilité par incrémentation* dudit ensemble, le reste n'est au mieux que poésie. Même en tenant compte de l'implicite indevinable – le caractère *minimal* d'une telle partie –, nous sommes en reste quant à expliciter les éléments de  $\{1, 2, 3, \dots\}$  : chaque nombre primitif tombe certes dedans mais... et au-delà ? La clarté même de leur frontière s'évanouit dans l'indéterminé...

Nous espérons après cette brève étude que la lectrice ne cultivera plus d'illusions – afin surtout de ne pas en *transmettre* – sur l'usage et donc le sens des « ... ».

Parfaitement légitimes dans le primitif, ils nous font par de séduisantes analogies déjà perdre pied en-dehors, même avec des nombres descriptibles par les opérations élémentaires, et nous leurrent profondément lorsqu'un évocable est en jeu. *Nous ne saurions trop conseiller d'utiliser plutôt les intervalles entiers  $\llbracket a, b \rrbracket$  (et pas uniquement les segments<sup>24</sup>), ainsi que la lettre  $\mathbb{N}$  toute simple ou son déguisement  $\llbracket 0, \infty \rrbracket$ . Point de suspension !*

À titre d'exercice, on pourra s'amuser, ayant évoqué un  $n > 10^{80}$ , à comparer les huit occurrences de « ... » dans la liste suivante :  $1, 2, 3, \dots, 20, 21, \dots, 999, 1000, \dots, 10^5, 10^5 + 1, \dots, 10^{80}, 10^{80} + 1, \dots, n, n + 1, n + 2, \dots, n^2, \dots, n^3, \dots$

La question de la définition des intervalles entiers se pose alors de façon cruciale : faute de points de suspension *suggérant* ce que l'on désirerait “capter” au-delà du primitif, comment pouvons-nous même prétendre en parler ?

Une réponse est apportée avec l'axiomatisation de l'arithmétique par Guiseppe PEANO<sup>25</sup> ou celle (dans un cadre quasi-ensembliste) de Richard DEDEKIND<sup>26</sup>. Il convient d'en saisir la portée et les limites : chaque nombre primitif s'y code très bien (itérer la succession depuis 0 autant de fois que ce nombre), l'axiome de récurrence formalisant “du mieux possible” le côté minimal de  $\mathbb{N}$ .

Une autre réponse, reprenant notre fil directeur *itératif*, viendra en théorie des ensembles avec l'axiome de l'infini puis le théorème #126 de DEDEKIND : ce sera la section 1.4. La section 3.2 présentera et prouvera en quoi ces deux réponses sont équivalentes.

### 1.3 suite infinie formelle ou liste finie primitive ? Un peu d'hygiène numérique

22 c'est le lien le plus fort que nous ferons avec l'évocation en contexte démonstratif

23 Il serait intéressant d'étudier la pertinence de cette affirmation dans les langues autre que le français.

24 on préférera par exemple écrire  $\llbracket 0, n \rrbracket$  au lieu de  $\llbracket 0, n - 1 \rrbracket$  et surtout à la place de  $\{0, 1, \dots, n - 1\}$

25 cf. [Pean1889]

26 cf. *Que sont et à quoi servent les nombres ?*, §6, déf<sup>o</sup> 71 (in [Dede18\*\*], p. 153)

Il est usuel de rencontrer dans des énoncés ou des corrigés certaines formulations visant à énoncer ou établir des théorèmes portant sur des listes de réels. Par exemple :

« Soit  $x_1, \dots, x_n$  des réels » ou « Soit  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$  ».

L'intention s'éclaire avec l'habitude : le nombre  $n$  désigne la longueur de la suite évoquée et les réels  $x_1, \dots, x_n$  ses coordonnées.

Une clarté cependant superficielle car demeurent nombre de problèmes entretenant hélas la confusions chez les étudiant·es.

**En tant qu'enseignant·es, nous nous devons de tuer ces confusions dans l'œuf lorsque des moyens simples existent – et il EN existe.**

Passons vite sur le français (accorder « Soient [...] des réels »), les choix de notations (pourquoi diable tout appeler “ $x$ ” ?) et les précautions d'usage (il aide souvent d'explicitier le deuxième terme d'une telle suite : « Soient  $x_1, \boxed{x_2}, \dots, x_n$  des réels ») afin de nous concentrer sur le fond.

Le premier problème résulte du non-respect d'une règle d'hygiène élémentaire : *ne pas nommer pareillement deux objets a priori distincts*. Or la notation  $x_1$  est la version séquentielle de l'image  $x(1)$ , image qui présume que fasse déjà sens une certaine application  $x$  pouvant s'appliquer sur l'argument 1. Cette notation est par conséquent illégitime pour désigner un réel sur lequel on aimerait quantifier.

Le second problème fait immédiatement écho au premier et est d'ordre formel : du point de vue de la logique prédicative, *sur quoi quantifie-t-on au juste ?*

Ce problème est déjà criant ET TRÈS CONCRET lorsque l'on résout des systèmes linéaires sur  $\mathbf{R}^2$  ou  $\mathbf{R}^3$  : pour décrire une base de l'espace des solutions, on peut montrer l'égalité ensembliste entre le sev des solutions et le sev engendré par telle famille libre, égalité qui se fait proprement par double-équivalence en quantifiant sur un espace incluant ces deux sevs – espace donc formé de vecteurs. C'est pourquoi il convient de quantifier *sur les vecteurs* (« Soit  $v \in \mathbf{R}^2$  ») puis de nommer *dans un second temps* les coordonnées du vecteur évoqué (« dont on note  $v_1$  et  $v_2$  les abscisse et ordonnée respectives »). Cette dénomination est toutefois inutile<sup>27</sup> vu les conventions de notations séquentielles rappelées ci-dessus.

Nous proposons par ailleurs, si l'on souhaite alléger les notations, de fusionner l'évocation-suivie-d'une-définition « Soit  $v \in \mathbf{R}^2$  dont on note  $a$  et  $b$  les coordonnées respectives » sous la forme

« Soit  $v =: (a, b) \in \mathbf{R}^2$  »,

la place des « : » par rapport au symbole d'égalité signalant clairement où se situe le *definiendum*.

Un troisième problème redouble le précédent : avec un  $n$  “général” (pas 2 ou 3 comme ci-dessus), à nouveau *sur quoi quantifie-t-on ?* Est-ce que l'on évoque une suite finie dont on note  $n$  la longueur ? Est-ce que l'on évoque *d'abord* un nombre puis une suite de longueur le nombre évoqué ? Les démarches diffèrent et il s'agit simplement d'en avoir conscience afin d'utiliser le moment venu celle qui conviendra le mieux.

D'expérience, la seconde démarche convient la plupart du temps et évite tous les problèmes précédents :

« Soit  $n \in \mathbf{N}$ , soit  $v \in \mathbf{R}^n$  ».

Un dernier problème, enfin, le plus subtil, se situe ENTRE les deux précédents et fait intervenir les nombres primitifs. Nous pouvons certes dire « Soient  $a, b, c$  trois réels » pour ramasser les trois évocations successives « Soit  $a$  un réel, soit  $b$  un réel et soit  $c$  un réel », nous pouvons remplacer « trois » par « quatre », par « dix », par « quarante-deux » (nous trouverons bien

<sup>27</sup> Il serait bien sûr possible de quantifier sur deux réels puis de nommer le vecteur dont les coordonnées sont ces réels dans un certain ordre (par exemple : « Soient  $a$  et  $b$  deux réels et notons  $v := (a, b)$  »). La quantification raterait cependant son but dans le cas de la résolution de systèmes linéaires, faute de saisir l'objet (vectoriel) sur lequel porte la généralité à établir (l'égalité ensembliste de deux sous-espaces vectoriels).

assez de lettres) mais... aussi par « un milliard » ? Hésitation face à la difficulté pratique, à notre capacité à saisir un tel nombre<sup>28</sup> et à le distinguer de son successeur ou de son prédécesseur... Nous entrons ici dans le flou où la sphère primitive se dilue et perd sa consistance, un flou que nous connaissons en fait très bien depuis que l'être humain a cherché à dénombrer les grains de sable d'une plage<sup>29</sup> ou les atomes de l'univers.

Si nous cherchons à évoquer une liste primitive dont la longueur est immédiatement saisissable, nul besoin d'indexation : les symboles choisis parleront d'eux-mêmes sans qu'on ait besoin de prendre sa loupe pour aller lire les indices. Comparer à cet égard la lisibilité de

« Soient  $a, b, c > 0$  des réels. Minorer la somme  $a/(b+c)+b/(a+c)+c/(a+b)$  »

avec celle de

« Soient  $x_1, x_2, x_3 > 0$  des réels. Minorer la somme  $x_1/(x_2+x_3)+x_2/(x_1+x_3)+x_3/(x_1+x_2)$  ».

On retrouve ici le lien fort entre entiers primitifs et groupes d'objets évoqué par GONSETH et autrement formulé par Gaston MILHAUD : « **L'idée primitive du nombre est évidemment celle que fournit une collection d'objets distincts. Le nombre est tout d'abord concret, il ne se sépare pas de la collection à laquelle on le fait correspondre.** »<sup>30</sup>

Ou encore par MAYBERRY qui, nous rappelant<sup>31</sup> la définition euclidienne d'un nombre dans le Livre VII des *Éléments* (« A number (arithmos) is a multitude composed of units. »), enchaîne : « [t]his original meaning of “number” still survives in English, as when we say, “Lieutenant Litghtoller was included among the *number of survivors* in the wreck of the Titanic” ». MAYBERRY nous signale également l'usage obligatoire en arabe de parler des nombres de 3 à 10 en termes *ensemblistes*, c'est-à-dire d'écrire « There is **a five of** horses in the field » au lieu de « **There are five** horses in the field ».

Et comment ne pas entendre ci-dessus les « nombres-de » chers à Stella BARUK<sup>32</sup> ?

Si l'on veut bien consulter des ouvrages de début vingtième<sup>33</sup>, on rencontrera la formulation « Soient  $a, b, c, \dots, \ell$  des nombres », l'implicite étant de ne pas se concentrer sur l'explicitation des lettres manquantes car, PRÉCISEMENT, cet ensemble de lettres, ce *nombre-de* lettres EST l'objet de la quantification. Dans le même esprit, le principe de récurrence finie pourrait s'exprimer : « pouvoir, à partir d'(un nombre primitif d')implications  $A \Rightarrow B, B \Rightarrow C, \dots, K \Rightarrow L$ , déduire celle  $A \Rightarrow L$ . »

#### 1.4 axiomes de l'infini, vers le théorème #126 de Dedekind

Le cadre formel de notre discours sera la théorie ensembliste dite d'Ernst ZERMELO et Abraham FRAENKEL, dont nous renvoyons aux annexes pour une formulation possibles des axiomes. L'un d'entre eux concentrera toute notre attention : *celui de l'infini*. Fidèle à notre fil directeur de l'*action itérative*, prenons-y un peu de hauteur.

Étant donné dans le monde ensembliste un objet  $o$  et une “application”<sup>34</sup>  $f$ , on voudrait – arguant d'une volonté de pouvoir d'action illimitée – pouvoir agir indéfiniment sur  $o$  en y appliquant  $f$ , sans “obstacle” (comme le rappelle la légende du brahmane Sessa<sup>35</sup>, l'opération « doubler », même partant d'un grain de riz, va rencontrer d'insurmontables obstacles terrestres). Cette volonté serait réalisable au sein d'un ensemble possédant<sup>36</sup> l'objet  $o$  et stable par

28 Si le milliard vous semble à la limite de l'atteignable, essayez voir [le nombre de GRAHAM](#) dont parle Ronald GRAHAM lui-même sur la chaîne UT du vidéaste Numberphile. Ou sa factorielle.

29 Par exemple Archimède dans son *Arénaire*

30 [Milh1898] p. 61

31 [Mayb2000] p. 18

32 voir par exemple l'article « [nombre / nombre-de](#) » dans le dictionnaire [Baru2008] (pp. 457– 64)

33 ???source???

34 *stricto sensu*, une application a besoin d'un ensemble de départ (et un d'arrivée), nos guillemets signalent ici que la classe de départ est l'univers ensembliste *tout entier*. Par exemple, la “correspondance fonctionnelle”  $e \mapsto \{e\}$ , qui à chaque ensemble associe le singleton possédant cet ensemble, est une telle “application”, qui plus est injective. (Formellement, la notion sous-jacente est celle de *prédicat binaire univoque*.)

35 [Taha1938], chapitre 16

36 Le verbe “contenir” est ambigu selon qu'il se réfère à une *partie* ou un *élément*. Or un autre verbe existe déjà pour les parties, bien qu'utilisé généralement à la voix passive : *inclure*. Quant aux éléments, il suffit de remarquer que le



l'application  $f$ , la stabilité levant précisément tout obstacle à l'itération. Lorsque l'on dispose déjà de  $\mathbb{N}$ , un candidat naturel est l'ensemble  $\{f^n(o)\}_{n \in \mathbb{N}}$  des images de  $o$  par les itérés de  $f$  pour la composition ; sans  $\mathbb{N}$ , cependant, comment faire ? tout particulièrement lorsque notre action ne reviendra jamais sur ses pas, auquel cas nous allons avoir besoin de beaucoup de place pour itérer indéfiniment ?

Eh bien justement, **sans axiome de l'infini, la théorie des ensembles ne réussit pas à capter l'infini**, au sens où l'on peut interpréter le langage ensembliste chez les naturels (quoi de plus fini ?), çàd en *modélisant* chaque ensemble par un naturel et en interprétant une appartenance  $m \in n$  par « le  $m$ -ième bit de  $n$  écrit en binaire vaut 1 ». Le résultat est un “univers”  $\mathbb{N}$  d'ensembles... chacun finis ! Étudier les ensembles dans l'axiomatique ZF, c'est donc fondamentalement étudier l'infini<sup>37</sup>.

Pour revenir à notre volonté d'itérer indéfiniment, il convient d'envisager le pire, à savoir un voyage sans boucle. Il y a en fait tout un schéma d'axiomes de l'infini, deux à deux équivalents<sup>38</sup> :

*étant donné un objet et une “application” injective évitant cet objet,*

*ce dernier est alors élément d'un certain ensemble stable par l'injection donnée*<sup>39</sup>.

Intuitivement, si l'on part d'un endroit sans faire de boucle (aspect injectif) ni revenir au point de départ (aspect évitement de l'objet initial), on est alors parti pour un long voyage<sup>40</sup> : un infini *potentiel*, dont l'axiome énonce précisément l'existence du pendant *actuel*.

Insistons lourdement sur cette différence entre infini *potentiel* et infini *actuel*. Le premier habite nos vies au sens de notre caractère *a priori* illimité : nous pourrions y voir notre libre-arbitre, notre génie créateur<sup>41</sup>, ou encore une certaine philosophie ouverte<sup>42</sup>. Le second est une prétention idéale aussi merveilleuse qu'elle ne tient pas une seule seconde l'épreuve des faits : qui d'entre nous peut prétendre avoir rencontré l'infini dans ce bas monde ? « Je l'ai toujours dit : on ne peut pas parler de *tous* les nombres parce qu'il n'y a pas “**tous les nombres**” ». <sup>43</sup> Quant à comparer strictement *plusieurs* infinis actuels, tels  $\mathbb{N}$  et  $\mathbb{R}$ , le jugement de WITTGENSTEIN est sans appel.<sup>44</sup>

Une fois actée – par décret axiomatique – l'existence d'un infini, intersecter la classe de ces infinis actuels livre alors le plus petit d'entre eux au sens de l'inclusion : notre  $\mathbb{N}$  “bien connu” – du moins sa “copie” relative aux départ et injection sus-choisis. Cette dernière prend alors le nom de “succession”<sup>45</sup> et correspond dans  $\mathbb{N}$  à l'incrément  $n \mapsto n + 1$ .

Un peu de travail permet ensuite d'établir le théorème de récurrence usuel, puis celui d'existence et unicité des suites définies par récurrence “simple”, çàd par itération d'un application stabilisant un ensemble donné. Ce théorème, numéroté 126 chez DEDEKIND, prend la forme suivante dans le cadre ZF :

$$\text{le \#126 :} \quad \forall A, \quad \begin{array}{l} \forall f \in A^A, \\ \exists ! a \in A^{\mathbb{N}}, \\ \forall @ \in A, \end{array} \quad \begin{array}{l} \{ \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = f(a_n) \\ \text{et} \\ \{ a_0 = @ \end{array} .$$

Une interprétation possible en français :

---

sujet auquel appartient un objet possède ce dernier. (Ainsi la relation  $\ni$ , réciproque de l'appartenance  $\in$ , est-elle une relation de possession.)

37 Pour plus de détails sur ce point de vue, on renvoie aux travaux de feu Patrick DEHORNOY, tout particulièrement son ouvrage *la théorie des ensembles* paru en 2017 aux éditions Calvage & Mounet.

38 dans le même contexte axiomatique, à savoir ZF privé dudit axiome de l'infini

39 L'axiome usuel est énoncé avec pour objet initial  $\emptyset$  et pour “injection”  $a \mapsto a \cup \{a\}$  mais ce n'est qu'une commodité technique facilitant l'édification de la théorie des ordinaux au détriment de la clarté de l'amande logique. À noter que cet axiome, *dixit* ZERMELO lui-même, « est dû pour l'essentiel à M. R. Dedekind » (cf. [Dede18\*\*], p. 75, footnote).

40 « Un voyage de mille lieues commence toujours par un pas » (Lao Tzu, *Tao Te King*, chap. 64)

41 dont nous parle Henri BERGSON dans [Berg1907]

42 aussi appelé *idonéisme* par son développeur Ferdinand GONSETH, cf. par exemple [Gons1952]

43 LUDWIG WITTGENSTEIN, *Remarques philosophiques*, remarque 129

44 « Si l'on disait : “La réflexion sur le procédé de la diagonale nous montre que le concept de ‘nombre réel’ a beaucoup moins d'analogie avec le concept de nombre cardinal que l'on incline à le penser à cause de certaines analogies trompeuses”, cela aurait un sens véridique et honorable. Mais c'est justement le contraire qui se produit : dans la “mesure” où l'on compare “l'ensemble” des nombres réels soi-disant selon leur grandeur avec celui des nombres cardinaux. La différence de genre des deux conceptions est exposée comme différence d'extension par le truchement d'une expression erronée. Je crois et j'espère qu'une génération à venir rira de cette jonglerie. » Cf. [Witt1937-44], p. 126

45 le successeur d'un nombre est alors défini comme son image par l'opération de succession

*étant donné une application stabilisant un ensemble, chaque élément de ce dernier induit une unique suite, à valeurs dans cet ensemble, de terme initial cet élément et dont chaque terme non initial vaut l'image par l'application donnée du terme précédent.*

Résumons, concrètement, de manière utile et utilisable par nous enseignant·es et par nos étudiant·es, les apports de l'axiome de l'infini vu à travers notre prisme de l'action :

- 1) fait sens la *SUITE* des itérés de chaque objet par chaque “application” ensembliste ;
- 2) on obtient un ensemble d'itérés *infini* lorsque l’“application” est injective et évite l'objet de départ ;
- 3) on peut rajouter au langage ensembliste un symbole d'objet singulier  $\mathbf{N}$  “ensemble des entiers naturels” (obtenu e. g. en itérant  $a \mapsto a \cup \{a\}$  sur  $\emptyset$ ).

## 2. — exemples d'itérations

### 2.1 quel terme initial ?

Dénonçons tout d'abord un premier flou, face à une consigne du type

« Établir existence et unicité de la suite  $a$  définie par  $a_0 \in [0,1]$  et  $\forall n \in \mathbf{N}, a_{n+1} = a_n^2$  ».

Le problème éclate au grand jour quand on demande le terme initial de “cette” suite. Répondre  $a_0$  serait au mieux tautologique et manquerait de toute façon complètement le fond de la question. L'intention à comprendre dans cette consigne – **dont le flou ne devrait jamais être un modèle pour nos étudiant·es** – est : d'une part qu'il n'y a aucune contrainte sur le terme initial – mais alors *quid* de l'unicité demandée ? – ; d'autre part qu'une fois imposé le terme initial il y a bien unicité et existence. Il est aussi simple que facile de traduire fidèlement – et clairement – ces intentions :

« Soit  $i \in [0,1]$ , établir existence et unicité d'une suite  $a$  telle que  $a_0 = i$  et  $\forall n \in \mathbf{N}, a_{n+1} = a_n^2$  ».

Quant à une résolution, il suffit d'utiliser le #126 avec l'application « élever au carré » en remarquant que cette dernière stabilise le segment  $[0,1]$ , lequel possède bien le terme initial  $i$  imposé. En bonus immédiat non demandé, la suite  $a$  prend ses valeurs dans ledit segment.

### 2.2 comment le sens se propage-t-il par récurrence ?

Un autre flou, **que nous devrions pourchasser avec autant d'opiniâtreté que nous souhaitons livrer à nos étudiant·es des bases saines**, se trouve parfois dans les débuts de la récurrence et consiste à demander, par exemple<sup>46</sup> :

« On définit la suite  $b$  par  $b_0 > 1$  et la récurrence  $b_{n+1} = (b_n + 1) / (b_n - 1)$ .  
Prouver que si  $b_n$  existe alors  $b_{n+1}$  existe ».

Nous avons déjà relevé le flou concernant le terme initial et passerons sur le symbole errant  $n$ , dénué de tout acte de naissance, là où il aurait été simple et facile de préciser « pour chaque naturel  $n$  », afin de nous concentrer sur les non-sens plus graves.

Tout d'abord, une suite est – par définition – une application de source  $\mathbf{N}$ . Ensuite, la notation  $b_n$  est (*a priori* et faute de mention contraire) la version séquentielle de l'image  $b(n)$ , image qui présume que fasse déjà sens une certaine application  $b$  pouvant s'appliquer sur l'argument  $n$ .

<sup>46</sup> Ce genre d'énoncé est un souvenir de notre lycée (1999–2002) dont nous n'avons pas pu retrouver les sources. En revanche, on pourra trouver sur ce polycopié (2002) une rédaction posant des problèmes analogues, bien que s'adressant à un public spécialisé (préparation olympique) : « Une application simple d[u principe de récurrence] est la définition par récurrence : si on définit un objet  $x_0$  puis si, pour tout entier  $n$ , on donne une manière de définir l'objet  $x_{n+1}$  à partir de l'objet  $x_n$ , alors les objets  $x_n$  sont bien définis pour tout  $n$ . »

Dire enfin qu'un objet "existe" est au mieux un abus de langage pour dire que l'expression littérale utilisée pour désigner/dénoter cet objet *a du sens, fait sens, dénote* effectivement, pointe vers quelque objet<sup>47</sup>. Ces trois points mis au jour, la consigne fond de confusion : si la suite  $b$  est déjà donnée, *dans la plénitude de son sens*, il n'y a alors rien à établir ; dans le cas contraire, la consigne parle de choses insensées et impose alors, *faute de sujet*<sup>48</sup>.

Ces trois problèmes disparaissent en un clin d'œil lorsque qu'on reformule par exemple :

« Soit  $i > 1$  un réel. Montrer alors qu'il y a une unique suite réelle  $b$  donnant sens à et vérifiant les égalités<sup>49</sup>  $b_0 = i$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, b_{n+1} = (b_n + 1) / (b_n - 1)$  ».

Afin d'alléger, on pourrait réduire « donnant sens à et vérifiant les égalités » simplement en « telle que », **à condition d'avoir auparavant EXPLICITÉ l'abus sus-dénoncé :**

« Soit  $r > 1$  un réel. Établir alors l'existence d'une unique suite réelle  $b$  telle que  $b_0 = r$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, b_{n+1} = (b_n + 1) / (b_n - 1)$  ».

En termes de résolution, il suffit d'appliquer le #126 à l'application  $(\text{Id} + 1 / \text{Id} - 1)$  définie sur l'intervalle  $]1, \infty[$  et stabilisant ce dernier, lequel possède bien le réel  $i$  évoqué.

### 2.3 suite constante ou suite constante ? un exemple riche d'enseignements

La constance d'une suite pourrait se définir de deux façons *a priori* différentes : par sa constance en tant qu'application (çàd prendre partout une même valeur), ou bien par l'égalité de deux termes successifs quelconques (égalité se transmettant de proche en proche), les deux approches revenant bien sûr au même au vu des équivalences

$$\forall c \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, [\forall n \in \mathbb{N}, c_n = c_{n+1}] \Leftrightarrow [\exists C \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}, c_n = C]$$

Si ces dernières doivent nous frapper par leur évidence, les établir demeure néanmoins formateur à bien des égards. Citons par exemple :

- 1) la formulation même de l'énoncé à établir (formalisation ci-dessus) ;
- 2) l'appel d'une récurrence "évidente" (qu'il s'agit justement de savoir formuler proprement) ;
- 3) la formulation de l'axiome ou théorème de récurrence ;
- 4) la mise au jour des trois axiomes de l'égalité (vue comme relation d'équivalence) ;
- 5) la mise au jour de tautologies validant certains raisonnements usuels (double-implication, établissement "naturel" d'une conjonction) ;
- 6) la typification des énoncés affirmables sans preuves (théorèmes ou axiomes, logiques ou spécifiques) ;
- 7) la conduite d'une analyse-synthèse (comment deviner "la" valeur d'une suite "constante").

Outre tout cela, la situation revêt quelque analogie avec, en calligraphie, celle du sinogramme 永 (prononcer *èi*) dont le tracé comporte les huit tracés élémentaires, caractère renfermant ainsi à lui-seul une mine d'enseignements. En effet, démontrer les équivalences ci-dessus révélera naturellement *les quatre actes fondamentaux du jeu de preuve – supposer, affirmer, évoquer, évoquer-bis –* ainsi que *les six règles de ce jeu –* deux pour chacun de **ces trois symboles qui sont autant de difficultés pour nos étudiant·es<sup>50</sup> : implication  $\Rightarrow$ , généralité  $\forall$  et existence  $\exists$** . Si donner quelques règles de grammaire n'a jamais créé d'écrivain·es, en priver nos étudiant·es serait dommage vu la simplicité, l'utilité et la naturalité de ces règles, **leur sens collant**

47 Le problème de dire «  $1/0$  et  $\ln(-1)$  n'existent pas » éclate quand on demande le sujet de cette phrase négative : *comment en effet dire quoi que ce soit sur quelque chose qui n'existerait pas ?* La distinction entre signifiant et signifié ne date pas d'hier, il serait bon que nos étudiant·es ne la découvrent pas sur le tas – ni sur le tard, d'ailleurs. L'article « Sens et dénotation » du recueil [Freg1\*\*\*] apporte d'éclairantes et significatives distinctions sur le sujet.

48 « Le but de la philosophie est la clarification logique des pensées. // La philosophie n'est pas une théorie mais une activité. // Une œuvre philosophique n'est pas de produire des « propositions philosophiques », mais de rendre claires les propositions. // La philosophie doit rendre claires, et nettement délimitées, les propositions qui autrement sont, pour ainsi dire, troubles et confuses. » Cf. [Witt1922], aphorisme 4.112.

49 La lectrice voudra bien entendre qu'une généralité de la forme  $\forall n, \lambda_n = \mu_n$  soit abusivement qualifiée d'égalités au pluriel (penser une généralité comme une conjonction généralisée).

50 cf. notre atelier [Pour une grammaire conviviale en mathématique](#) des journées de l'APMEP 2023

à l'usage<sup>51</sup>. C'est pourquoi nous pensons cet énoncé élémentaire un excellent prétexte à les y introduire. Et tout cela grâce à l'opération de succession.

Un dernier bienfait de cet énoncé élémentaire est qu'il concentre à lui tout seul l'essentiel des récurrences menées usuellement, les cachant dans l'unique récurrence apparaissant au sein de la preuve ci-dessus. Or cette dernière a autant besoin d'être mentionnée que cet énoncé est généralement perçu comme trivial ! On peut ainsi se passer de nombres de récurrences usuelles avec un peu d'habileté. Gage d'élégance.

Soit par exemple  $g$  une suite complexe dont chaque terme vaut le double du suivant. La suite  $n \mapsto 2^n g_n$  est alors constante (au sens de l'égalité de deux termes consécutifs), çàd est constante (au sens d'une image singleton), donc vaut son premier terme, d'où l'égalité  $g = [n \mapsto g_0 / 2^n]$ . Pas de récurrence ! (elle se cache dans l'équivalence sus-établie)

De la même manière, si  $a$  dénote une suite complexe dont la différence de deux termes consécutifs vaut  $3i$ , alors la suite  $n \mapsto a_n - 3in$  est constante, donc vaut son premier terme, d'où l'égalité  $a = (a_0 + 3ni)_{n \in \mathbb{N}}$ . Ni vu ni connu...

La lectrice pourra s'entraîner de même avec la suite factorielle, puis inventer un mélange de ces trois exemples<sup>52</sup> à l'instar de la relation de récurrence  $s_{n+1} = 2n s_n - 1$ . Ou encore s'attaquer à une suite dont chaque terme vaut le *carré* du suivant. Enfin, remplacer l'égalité par une *comparaison* ne dénaturera pas l'idée sous-jacente, la *constance* devenant alors simplement (*dé*)*croissance* – illustrations à suivre.

## 2.4 applications directes du #126 en terrain concret

Nous proposons à présent nombre d'applications immédiates du #126 que nos étudiant·es peuvent être amené·es à rencontrer concrètement, rédigées directement, sans fioriture. À la lectrice d'en apprécier le gain relatif à des rédactions n'utilisant pas explicitement ce théorème – et d'en détailler les implicites lorsque notre concision prendra parfois de la hauteur.

Nous varierons les formulations linguistiques à fins de diversité de style.

Précisons enfin qu'*AUCUNE* *récurrence* n'est utilisée dans nos raisonnements, suivant l'esprit de la partie précédente.

① (*un archi-classique*)      Abrégeons  $S := [0,1]$ . Vu les inclusions  $\sin(S) \subset \sin([0,\pi/2]) = S$ , l'application  $\sin$  stabilise le segment  $S$ , ce qui légitime (avec l'appartenance  $1 \in S$ ) la définition de la suite  $s$  à valeurs dans  $S$  vérifiant  $s_0 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, s_{n+1} = \sin(s_n)$ . La minoration  $\sin \leq \text{Id}$  sur la partie  $S$  fournit alors la décroissance de la suite  $s$ , laquelle (étant bornée) converge donc, l'unique point fixe et la continuité de  $\sin$  livrant par ailleurs la nullité de sa limite.

② (*énumération croissante des parties infinies de  $\mathbb{N}$* )      Notons  $\aleph$  (lire aleph<sup>53</sup>) l'ensemble des parties infinies de  $\mathbb{N}$  et soit  $I$  une telle partie. Chaque partie infinie étant non vide et le restant quand on lui retire n'importe lequel de ses éléments, l'application de source et but  $\aleph$  qui retire de chaque partie son plus petit élément (çàd qui agit comme  $P \mapsto P \setminus \{\min P\}$ ) fait sens et définit par itération de départ  $I$  une suite  $(J_n)$  décroissante à valeurs dans  $\aleph$ . La lectrice vérifiera alors que la suite  $(\min J_n)$  énumère la partie  $I$  en croissant strictement.

③ (*un autre archi-classique*) L'application  $\sqrt{\phantom{x}}$  stabilisant l'ouvert  $]1, \infty[$ , lequel possède par ailleurs le nombre 42, il y a une unique suite  $r$  (comme "racine") à valeurs dans cet ouvert, de terme

51 « **Une signification d'un mot est un mode d'emploi du mot.** // Car elle est ce que nous apprenons lorsque le mot est incorporé dans notre langage. » (L. WITTGENSTEIN, *De la certitude*, remarque 61)

52 dans la même veine, un exercice amusant est de dériver l'application  $t \mapsto t'$  (de source et but  $\mathbf{R}_+^*$ ) où le nombre de symboles  $t$  dans la tour exponentielle n'est plus 2 mais un naturel quelconque (*indications* : formaliser d'abord une telle tour exponentielle, puis utiliser une dérivée logarithmique)

53 lettre utilisée par Georg CANTOR pour dénoter les infinis (le livre [Mach1996] mentionne p. 75 le rapport, dans certaines traditions cabalistiques, entre la lettre  $\aleph$  et l'infini ou le divin, par exemple le fait que la Torah commence par la lettre suivante bet  $\beth$ , suggérant l'association entre  $\aleph$  et "ce qui nous précéderait").

initial 42, et telle que  $\forall n \in \mathbb{N}, r_{n+1} = \sqrt{(r_n)}$ . Même conclusion en remplaçant l'ouvert  $]1, \infty[$  par l'intervalle  $[0, 1[$  et la valeur 42 par son inverse. Actant la définition<sup>54</sup> d'une telle suite  $r$ , comparer Id avec  $\sqrt{\phantom{x}}$  sur l'un ou l'autre de ces intervalles permettrait alors d'encadrer chaque terme de la suite  $r$  par le réel 1 et le terme précédent, d'où la tendance (monotone) de cette suite vers 1.

④ (*nier une tendance vers  $\infty$* ) Montrons qu'une suite réelle ne tend pas vers  $\infty$  ssi on peut en extraire une sous-suite majorée.

Soit  $r \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  ne tendant pas vers  $\infty$ . Soit  $A > 0$  un réel tel que  $\forall N \in \mathbb{N}, \exists n > N, r_n < A$  (permis par hypothèse de non-tendance vers  $\infty$ ). Fait alors sens la suite  $\mu$  associant à chaque naturel  $N$  le plus petit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $r_n < A$ . Cette suite vérifie  $\mu_n > n$  et  $r_{\mu_n} < A$  pour chaque naturel  $n$ , la première condition montrant que la suite  $n \mapsto \mu^{on}(0)$  est une extractrice, la seconde condition que la sous-suite associée est majorée par  $A$ .

(Le sens réciproque est laissé à la lectrice.)

⑤ (*bonus monotonie*) L'application  $\text{Id} + 1/\text{Id}$  stabilise  $\mathbb{R}_+^*$ , d'où existence et d'unicité d'une suite  $p$  strictement positive telle que  $\forall n \in \mathbb{N}, p_{n+1} = p_n + 1/p_n$  et de premier terme  $\sqrt{5}$ . (On peut même remplacer  $\mathbb{R}_+^*$  par le fermé  $[2, \infty[$  à l'aide d'une comparaison arithmético-géométrique<sup>55</sup>.) La différence entre deux termes consécutifs sera alors de la forme  $1/p_n$ , a fortiori strictement positive, d'où la stricte croissance de la suite  $p$ .

Observer ici l'intérêt dans le #126 de préciser, pour la suite dont elle est l'objet, un ensemble où elle prend ses valeurs : élégance et économie.

⑥ (*itérés dans un monoïde, caractéristique d'un anneau*) Soit  $M$  un magma (çàd un ensemble régi par une loi de composition), noté multiplicativement, et soit  $m \in M$ . La composition à-droite-par  $m$  stabilise alors  $M$ , ce qui légitime la définition de la suite  $i$  (comme "itérer") vérifiant les égalités  $i_1 = m$  et  $\forall n \in \mathbb{N}^*, i_{n+1} = i_n m$ . Conclusion analogue avec la composition à-gauche<sup>56</sup>-par  $m$ , étant laissé à la lectrice le soin d'établir l'identité de ces deux suites lorsque le magma  $M$  est associatif et, si ce dernier est un monoïde<sup>57</sup>, le fait que cette suite soit un morphisme de monoïdes.

Soit maintenant  $A$  un anneau. L'application  $\mathbb{Z} \rightarrow A$  qui assigne à chaque entier  $z$  le  $z$ -ième itéré de l'unité de  $A$  est alors un morphisme de groupes additifs (et même d'anneaux), dont le noyau est donc un sous-groupe de  $\mathbb{Z}$ , çàd de forme  $\mathbb{Z}c$  pour un unique naturel  $c$  appelée la caractéristique de  $A$ .

⑦ (*algorithme de Héron pour approcher  $\sqrt{5}$* ) L'intervalle  $\mathbb{R}_+^*$  possède le nombre 3 et est stable par l'application  $t \mapsto 1/2 (t + 5/t)$ , ce qui livre une unique suite  $\mu$  (comme "milieu") strictement positive telle que  $\mu_0 = 3$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, \mu_{n+1} = 1/2 (\mu_n + 5/\mu_n)$ . Un peu de travail montrerait alors (sans récurrence !) la décroissance de la suite  $n \mapsto [1/2 (\mu_n/\sqrt{5} - 1)]^{(1/2^n)}$ , d'où en majorant cette dernière par son premier terme (noté ci-après  $c$  et vérifiant  $|c| < 1$ ) l'égalité asymptotique  $\mu_n - \sqrt{5} = O(c^{2^n})$  et la tendance (quadratique) de  $\mu$  vers  $\sqrt{5}$ .

⑧ (*un lemme pour le théorème de BOLZANO-WEIERSTRASS*) Établissons pour chaque suite réelle l'existence d'une sous-suite monotone.

Soit  $s$  une telle suite. Si l'ensemble  $I := \{i \in \mathbb{N} ; \forall n \in \mathbb{N}, s_n \geq s_i\}$  est infini, mettons  $I = \{i_0 < i_1 < i_2 < \dots\}$  pour une certaine suite  $i \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ , la sous-suite  $s \circ i$  croît alors. Sinon, l'entier  $M := 1 + \max I$  fait sens et l'on a alors pour chaque naturel  $i \geq M$  la non-appartenance  $i \notin I$ ,

54 Nous venons d'affirmer, en français courant, une existence formelle du type «  $\exists r \in ]1, \infty[ \dots$  » : le symbole  $r$  est par conséquent **MUET** et sa signification meurt à la fin de la phrase. Afin d'en parler par la suite, il faut lui redonner sens, il suffit pour cela d'évoquer : « **Soit une telle suite** ». Bien qu'il soit usuel d'omettre cette évocation, il convient de dénoncer **en amont** cet abus afin d'habituer nos étudiant-es à repérer les symboles qui n'ont pas reçu de sens – manipuler de tels symboles est en effet une pratique estudiantine très répandue...

55 pour chaque réel  $t > 0$ , noter  $r$  sa racine carrée et minorer  $t + 1/t = 2 + (r - 1/r)^2 \geq 2 + 0$

56 La présence de traits d'union vise à lever l'ambiguïté de la tournure « multiplier par  $m$  à droite » : face à un objet, penser d'abord à un côté (ici à droite) puis y placer le facteur  $m$ .

57 nous avons déjà rencontré plus haut (dans l'exemple ④ *nier une tendance vers  $\infty$* ) le cas usuel du monoïde fonctionnel  $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  en parlant de la suite  $n \mapsto \mu^{on}(0)$  formée à l'aide des itérés de la suite  $\mu$



laquelle s'écrit  $\exists n \in \mathbb{N}, \infty, s_n < s_i$ , ce qui donne sens à l'application  $f$  de source et but  $\mathbb{N}; \infty$  qui assigne à chaque entier  $i \geq M$  le plus petit  $n \in \mathbb{N}, \infty$  tel que  $s_n < s_i$ ; itérer l'application  $f$  fournit alors une extraction  $x := n \mapsto f^n(M)$  livrant une sous-suite  $s \circ x$  décroissante.

⑨ (sur une conjugaison) Le segment  $[0,3]$  est stable par l'application  $t \mapsto 3 - \sqrt{(t/2)}$ , d'où une unique suite  $\tau$  (comme "trois") y prenant ses valeurs, de terme initial 1 et telle que  $\forall n \in \mathbb{N}, \tau_{n+1} = 3 - \sqrt{(\tau_n/2)}$ . Utiliser la quantité conjuguée de  $\sqrt{(t/2)} - 1$  livre alors la décroissance de la suite  $n \mapsto 2^n | \tau_n - 2 |$ , d'où la tendance (géométrique) de la suite  $\tau$  vers 2.

⑩ (une équation fonctionnelle) Déterminer les applications  $f : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$  telles que  $f \circ f = 6 \text{Id} - f$ .

Soit un tel  $f$ , soit  $t \in \mathbf{R}_+$  et notons  $\tau$  la suite obtenue en itérant  $f$  à partir de  $t$ . On obtient alors pour chaque naturel  $n$  l'égalité  $\tau_{n+2} = 6\tau_{n+1} - \tau_n$ , dont le trinôme caractéristique associé vaut  $X^2 + X - 6 = (X - 2)(X + 3)$ , ce qui permet d'évoquer deux réels  $A$  et  $B$  tels que  $\tau = A(2^n) + B((-3)^n)$ . La positivité de  $\tau$  livre alors la nullité de  $B$ , donc  $\tau$  est géométrique de raison 2, d'où  $f(t) = \tau_1 = 2\tau_0 = 2t$ . Réciproquement, l'homothétie "doubler" convient.

⑪ (vers le théorème de CAYLEY-HAMILTON) Soit  $V$  un ev, soit  $f$  un endomorphisme de  $V$ , soit  $v \in V$  et notons  $s$  la suite  $n \mapsto f^n(v)$ . Le sev  $S$  engendré par  $\text{Im } s$  est alors stable par  $f$  et possède le vecteur  $s_0 = v$ . On pourrait en déduire<sup>58</sup>, lorsque  $V$  est de dimension finie, la nullité du polynôme caractéristique de  $f$  évalué en  $f$  puis appliqué en  $v$ .

La construction de  $S$  doit faire partie de la faune élémentaire des parties stables, comme l'illustre l'exercice suivant.

⑫ (une caractérisation des ensembles infinis) Soit  $A$  un ensemble infini, soit  $f : A \rightarrow A$  et montrons que  $f$  stabilise au moins une partie non triviale (çàd ni vide ni pleine).

Soit  $a \in A$  et considérons comme suggéré par l'exemple précédent la partie  $S$  formée des itérés de  $f$  appliqués en  $a$ . C'est une partie stable par  $f$  et non vide (car possédant  $a$ ). Si  $a$  vaut un itéré de  $f(a)$ , les itérés de  $a$  vont alors "boucler" et la partie  $S$  sera finie, donc non pleine par infinitude de  $A$ . Dans le cas contraire, la partie non pleine  $S \setminus \{a\}$  est celle des itérés de  $f(a)$ , donc restera stable.

(réciproque laissée à la lectrice)

⑬ (vers le spectre d'une matrice stochastique) Soit  $n$  un naturel, soit  $c \in \mathbf{C}^n$  non nul dont on note  $S$  le support (çàd l'ensemble des indices des coordonnées non nulles), soit  $u$  un complexe unitaire et soit  $\sigma : S \rightarrow S$  telle que  $\forall s \in S, c_{\sigma(s)} = u c_s$ . En appelant  $\Sigma$  la suite obtenue par itération de  $\sigma$  à partir de  $\min S$ , la suite  $c \circ \Sigma$  est alors géométrique de raison  $u$ , de premier terme non nul et non injective : sa raison  $u$  est par conséquent racine  $n$ -ième de l'unité<sup>59</sup>.

⑭ (valeurs d'adhérence) Soient  $c$  une suite complexe et  $L$  un complexe tels que : pour chaque réel  $\varepsilon > 0$ , pour chaque naturel  $r$ , il y a un terme de  $c$  de rang  $> r$  situé à distance de  $L$  moindre de  $\varepsilon$ . Prouvons qu'il y a alors une sous-suite de  $c$  tendant vers  $L$ .

Pour chaque naturel  $n > 0$ , remplacer  $\varepsilon$  par  $1/n$  livre un rang  $N > n$  tel que  $|c_N - L| < 1/n$ , ce qui légitime la définition de la suite  $\mu$  (comme "min") assignant à chaque naturel  $n > 0$  le plus petit tel  $N$ . La suite itérée  $n \mapsto \mu^n(1)$  est alors une extractrice qui convient.

Remarque longue (échange de quanteurs & dépendance fonctionnelle). De notre expérience, les rédactions de cet exemple ⑭ ne prennent jamais le temps de définir la suite  $\mu$  et se contentent généralement d'indexer le  $N$  ci-dessus par un  $n$ . L'intention est didactiquement louable et efficace : signaler une dépendance fonctionnelle  $N_n$ . Elle laisse cependant entièrement démunies nos

58 Notons  $d := \dim S$ . Une base de  $S$  sera alors formée par les  $d$  premiers termes de  $s$  (en commençant par  $s_0$ ), base dans laquelle la matrice de la restriction  $f_S$  sera cyclique, çàd sera la matrice compagne de son polynôme caractéristique : ce dernier évalué en  $f_S$  puis appliqué sur  $v$  sera alors nul, ce qui va permettre de conclure.

59 Ce contexte se rencontre, étant donné une matrice  $A$  de taille  $n \times n$  à coefficients positifs dont la somme sur chaque ligne vaut 1, lorsque  $(c, u)$  est un couple propre de  $A$  et  $\sigma$  l'application  $i \mapsto \min \{ j \in S ; a_{i,j} \neq 0 \}$ .

étudiant·es face à la question de comment *formaliser* une telle approche : *pourquoi diable y aurait-il une telle **application**  $N$  ?* (car c'est le propre de la notation  $N_n$  d'être relative à une **application**  $N$ )

En abrégant  $P_x^y$  le prédicat binaire  $|c_y - L| < 1/x$ , nous disposons dans l'exemple précédent des existences (de naturels)

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \exists N \in \mathbf{N}, P_n^N \quad \text{et souhaitons en déduire l'existence (d'une suite)} \\ \exists N \in \mathbf{N}^*, \forall n \in \mathbf{N}^*, P_n^{N(n)}.$$

Il suffit d'échanger les quanteurs et de remplacer l'ensemble des valeurs où tombe  $N$  par l'ensemble des suites à valeurs dans cet ensemble et indexées par l'ensemble où est prescrit  $n$ . Mais de quel droit pourrions-nous procéder ainsi ? Et ne pourrait-on pas plus généralement valider le schéma d'implications

$$\forall a \in A, \exists b \in B, P_a^b \Rightarrow \exists b \in B^A, \forall a \in A, P_a^{b(a)} \quad ?$$

Mettons les pieds dans le plat : il s'agit d'une forme de l'axiome du choix<sup>60</sup>. Et cette forme devrait convenir à toutes : **elle colle au sens** (en formalisant la dépendance fonctionnelle désirée) et **est précisément ce dont nous avons besoin**. Pourquoi ne pas la livrer **telle quelle** à nos étudiant·es ?

Lorsque  $B$  est au plus dénombrable, on peut y définir une fonction “minimum” en transportant l'ordre de  $\mathbf{N}$ , ce qui valide l'implication ci-dessus. C'est précisément ce que nous avons fait ci-dessus en définissant  $\mu$  à l'aide d'un “plus petit... tel que...”. Mais également dans deux exemples précédents<sup>61</sup>... l'aviez-vous seulement remarqué ?

### 3. — mathématique à rebours

#### 3.1 reconstructions des opérations usuelles (et plus...)

Comment saisir l'addition numérique suivant notre fil directeur itératif ? En remarquant qu'*ajouter un nombre revient à itérer “ajouter 1” autant de fois que ce nombre*.

Précisons. Pour chaque nombre  $n$ , le #126 donne sens à la suite notée  $^n p$  (comme “**p**lus  $n$ ”) obtenue par itération de la succession avec départ  $n$ . Pour chaque nombre  $a$  et  $b$ , on peut alors définir  $a + b := ^b p(a)$ .

Récupérons de même la multiplication usuelle en observant que *multiplier par un nombre revient à ajouter l'argument autant de fois que ledit nombre*. Chaque nombre  $n$  induit par itération de  $^n p$  à partir de 0 une suite notée  $^n m$  (comme “**m**ultiplié par  $n$ ”) et l'on définit ensuite  $a \times b := ^a m(b)$  pour chaque nombre  $a$  et  $b$ . Puis chaque nombre  $n$  induit par itération de  $^n m$  à partir de 1 une suite, notée  $^n e$  (comme “**e**xponentielle de base  $n$ ”), et l'on peut définir  $a^b := ^a e(b)$ ... Bref :

$$a + b = a + (1 + 1 + \dots + 1) \quad \text{avec } b \text{ symboles } 1, \\ a \times b = 0 + (a + a + \dots + a) \quad \text{avec } b \text{ symboles } a, \\ a^b = 1 \times (a \times a \times \dots \times a) \quad \text{avec } b \text{ symboles } a \dots$$

Pourquoi s'arrêter en si bon chemin ? Les flèches multiples  $\uparrow\uparrow\cdots\uparrow$  de Donald KNUTH<sup>62</sup> permettraient de poursuivre ce voyage commencé avec les trois pas ci-dessus, en partant de  $a \uparrow b := ab$ . Nous laissons la lectrice imaginer les définitions de  $a \uparrow\uparrow\cdots\uparrow b$  avec un nombre primitif de  $\uparrow$ .

Feu John CONWAY nous a également légué des notations ([les flèches chaînées](#)) pour décrire de (très (très (très))) grands nombres, flirtant de peu avec le nombre de GRAHAM, mais ce serait une autre histoire, où notre fil directeur itératif ne serait plus qu'une tige au sein d'un faisceau *récuratif*.

#### 3.2 maths à rebours : axiomatiser les nombres par le #126 ?

60 Signalons au passage la ruse diabolique utilisée par BOURBAKI pour “forcer” cet axiome dans leur système, en définissant l'existence grâce à un opérateur “témoin” (cf. Chapitre I, §4, 1 de [Bour1954], p. 35). Un choix discutable, comme le dénonce sévèrement l'article [Matt2013] au sujet de l'enseignement de la logique en France.

61 aux exemples ④ *nier une tendance vers  $\infty$*  et ⑧ *un lemme pour le théorème de BOLZANO-WEIERSTRASS*

62 voir par exemple l'article wikipedia « [Notation des puissances itérées de Knuth](#) »

Nous avons vu comment les axiomes de l'infini fournissent un ensemble  $N$  vérifiant le théorème #126. Réciproquement, nous allons montrer qu'étant donné une "application"  $s$  applicable sur chaque objet, un ensemble  $N$  et un objet  $o \in N$  donnant sens à et vérifiant le #126, alors d'une part l'"application"  $s$  est injective et évite  $o$ , d'autre part par l'ensemble  $N$  est le plus petit ensemble stable par  $s$  et possédant  $o$ .

Une démonstration se trouve dans [ce pdf](#), section 4.2, pp. 104–8.

Ce résultat légitime la possibilité d'une présentation alternative des nombres, vus à travers le prisme *itératif*, et ainsi de **mettre le #126 au fondement de l'arithmétique**.

### 3.3 action d'un monoïde : éclairer les actions de groupes

Les applications sont *le* mode d'action de référence en mathématique : agir sur un objet, c'est le transformer en une "image" de lui. Formellement, une application agit sur chaque élément source en s'y appliquant<sup>63</sup>. Si l'on désire itérer une telle action, il sera plus confortable d'imposer la stabilité de l'ensemble source par l'application considérée.

Soit donc  $E$  un ensemble. Chaque application  $E \rightarrow E$  agit alors sur  $E$  (au sens d'agir sur chacune de ses éléments) et l'on peut enchaîner de telles actions (çàd les composer pour  $\circ$ ). ***L'associativité de  $\circ$  formalise alors une constatation très primitive de nos actions : lorsqu'on enchaîne trois actes, regrouper les deux premiers ou les deux derniers n'est qu'une vue de l'esprit, qui ne change EN RIEN l'action réellement effectuée.*** En considérant de plus l'inaction comme une action "neutre", ce qui formellement revient à remarquer la neutralité de  $\text{Id}_A$  pour  $\circ$ , on obtient une interprétation ***praxique***<sup>64</sup> du monoïde  $E^E$ , çàd en termes d'***action***.

Quel rapport avec la succession ? Ce simple fait : *le #126 se réduit au cas où les ensembles stables considérés sont de la forme  $E^E$* . En effet, étant donné une application  $f$  stabilisant un ensemble  $A$  possédant un objet  $a$ , le cas réduit donne alors sens à la suite des itérés de  $f$ , itérés qu'il suffira d'appliquer ensuite chacun sur  $a$ . Fondamentalement, on ne fait donc qu'***enchaîner la même action, çàd faire succéder une action à elle-même.***

Notre fil directeur était *itératif* : le voilà ainsi grâce à la succession devenu *praxique*. Formellement, nous avons simplement remarqué qu'un sous-monoïde monogène de  $E^E$  (formé des itérés d'une application) était un monoïde.

Soit maintenant un monoïde  $M$  : ne pourrait-on pas réciproquement voir chaque élément de  $M$  comme une application agissant au sein d'un certain ensemble  $A$  ? Et où les règles primitives de l'action seraient respectées une fois formalisées ? Cela revient précisément à se donner un morphisme du monoïde  $M$  vers le monoïde  $E^E$ , ce que nous appellerons ***une action***<sup>65</sup> du monoïde  $M$  sur l'ensemble  $E$ . Les exemples abondent en pratique :

- le monoïde  $E^E$  agit – nous l'avons vu – sur  $E$  de manière fonctionnelle ;
- le monoïde  $N$  agit par  $M$  par itération ;
- le monoïde  $M$  agit sur lui-même par composition (à droite comme à gauche) ;
- les monoïdes  $M$  et  $\mathfrak{B}(M)$  agissent de même l'un sur l'autre par composition ;
- le corps de base de chaque espace vectoriel  $y$  agit par homothétie ;
- l'action neutre du monoïde  $M$  où chacun de ses éléments agit comme l'identité.

***Sans toujours en avoir conscience, nos étudiant-es côtoient ces exemples quotidiennement : notre souhait est qu'i-elles puissent en apprécier davantage la profondeur en les regardant au travers du prisme de l'action.***

<sup>63</sup> Une application est faite pour être appliquée. L'on devrait donc, en ce sens, parler plutôt d'*appliquables*.

<sup>64</sup> du grec ancien *praxis* (πρᾶξις) signifiant *action*

<sup>65</sup> Dans le même esprit, nous pourrions plus généralement définir une *action* d'un ensemble  $\Omega$  sur un ensemble  $A$  comme une application  $\Omega \rightarrow A^A$ , laquelle vue comme une application  $\Omega \times A \rightarrow A$  n'est autre qu'une *loi de composition externe*. (On se prive cependant de la possibilité d'*enchaîner* les actions, l'ensemble  $\Omega$  n'étant *a priori* ni régi ni associatif.)

Élargissons pour conclure la perspective en rajoutant *la possibilité d'agir à REBOURS*. La lectrice l'aura deviné : les groupes grattent à la porte.

Le #126 conserve de fait sa validité en remplaçant les monoïdes  $A^4$  et  $\mathbf{N}$  resp. par le groupe symétrique  $\mathfrak{S}_A$  et celui  $\mathbf{Z}$ .

Et les “actions-de-groupes” d’être revisitées à la lumière de *l'action*. Un groupe est fait pour agir !

---

#### 4. — 1, 2, 3... et au-delà ?

Prétextons un exercice taupinal. Soit  $f: \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}$  localement polynomiale : est-elle alors *globalement* polynomiale ?

Elle est polynomiale sur un voisinage de 0, çàd vaut un certain polynôme  $P$  sur un certain  $[0, a[$ . Elle est aussi polynomiale au voisinage de  $a$ , çàd vaut un certain polynôme  $Q$  sur un certain  $]b, c[$ . Or  $P$  et  $Q$  coïncident sur l’intersection de ces intervalles, laquelle est infinie, donc  $f$  vaut  $P$  sur  $[0, b[$ . Répéter l’argument en regardant localement en  $b$  et ainsi de suite livrerait une suite  $s$  strictement croissante (donc convergente dans  $[0, \infty[$ ) telle que  $f = P$  sur  $[0, s_n[$  pour chaque nombre  $n$ . Si  $\lim s = \infty$ , nous pourrions conclure.

Sinon, en remplaçant  $a$  par  $\lim s$ , nous pouvons reprendre notre marche et obtenir une nouvelle suite  $t > \lim s$  strictement croissante telle que  $f = P$  sur  $[0, \lim t[$ . Même alternative au sujet de  $t \dots$  et ainsi de suite... jusqu’à... jusqu’où ?? Est-on sûr d’atteindre ainsi  $\infty$  et de conclure ?

Notre exemple met en lumière une *nouvelle* opération générative, en plus de la succession : l’opération *limite*. Ces deux opérations engendrent, à partir de 0, déjà certes les nombres naturels, mais au-delà du fini *toute une nouvelle faune transfinie*, à commencer par la “limite” des naturels, notée  $\omega$ . Les nombres ainsi construits s’appellent *les ordinaux*, par référence à la numérotation de notre exemple :  $a$  était *le premier*,  $b$  *le deuxième*, ...,  $\lim(s)$  était *le  $\omega$ -ième*,  $\lim(t)$  *le  $2\omega$ -ième*...

Tout comme le #126 donne sens à une suite obtenue par itération, les ordinaux vérifient un théorème analogue d’existence et unicité de séquences<sup>66</sup> définies par succession *et limite*. Par exemple, il affirme existence d’une séquence  $(V_\alpha)$  d’ensembles démarrant à  $\emptyset$  telle que  $V_{\alpha+1} = \mathfrak{P}(V_\alpha)$  pour chaque ordinal  $\alpha$  et telle que  $V_{\lim \sigma} = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} V(\sigma_n)$  pour chaque suite ordinale  $\sigma$  strictement croissante. Cette induction transfinie permet par ailleurs de définir les surprenants nombres surréels de CONWAY<sup>67</sup> et est l’outil tout indiqué pour formaliser notre exercice taupinal qui y a introduit la lectrice<sup>68</sup>.

Tout comme le #126 équivalait à l’axiome de l’infini, son analogue ordinal équivaut à un autre axiome de ZF : celui de remplacement<sup>69</sup>. Ces deux résultats de mathématique à rebours ont à notre connaissance moins de dix ans et *légitiment une axiomatisation qui mettrait en son cœur la succession, sous la forme du #126 (et de sa version ordinale)*. Une proposition pédagogique qui méritait à nos yeux d’être creusée.

---

66 Une *séquence* est une “suite” indexée par les ordinaux, çàd une correspondance fonctionnelle (ou un prédicat binaire univoque) dont la classe source est celle des ordinaux.

67 voir par exemple [cet article](#) du CNRS, [cette courte vidéo](#) de Donald KNUTH ou encore [cette vidéo](#) touchante de CONWAY lui-même

68 cet exercice peut bien sûr se résoudre sans ordinaux (considérer le *supremum* des réels  $r$  tels que  $f$  est polynomiale sur  $[0, r[$ ) mais l’approche ordinale est tellement naturelle

69 plus de détails sur [ce billet](#) du blog de Joel HAMKINS d’août 2018

## Bibliographie

- [Baru2008] Stella BARUK, *Dico de mathématiques — Collège et CM2*, juin 2008, Éditions du Seuil
- [Berg1907] Henri BERGSON, *L'évolution créatrice* (1907), éd. PUF (2007), coll. Quadrige, édition critique *Le choc BERGSON* sous la direction de Frédéric WORMS
- [Bour1954] Nicolas BOURBAKI, *Éléments de mathématique — Livre I*, 1954, éd. Hermann & C<sup>ie</sup> (Paris)
- [Dede18\*\*] Richard DEDEKIND, *la création des nombres*, 1854-1899, éd° Vrin (2008), coll. Mathesis, introduction, traduction et notes par Hourya BENIS SINACEUR
- [Frege1\*\*\*] Gottlob FREGE, *Écrits logiques et philosophiques*, 1882-1923, trad. et introduction de Claude IMBERT, éd° Seuil (1971), coll. Points Essais
- [Gons1936] Ferdinand GONSETH, *Les mathématiques et la réalité*, 1936, éd. Félix ALCAN (Paris)
- [Gons1945-55] ID., *La géométrie et le problème de l'espace*, 1945–55, Éditions du Griffon (Neuchâtel), coll. bibliothèque scientifique
- [Gons1952] ID., « Motivation et structure d'une philosophie ouverte », revue *Dialectica*, vol. 6, n° 1 (mars 52), pp. 6–29.  
À noter que la revue *Dialectica* se désigne ouvertement comme l'organe de la philosophie ouverte. Les tables des matières de tous ses volumes & numéros est disponible sur la [bibliothèque en ligne Wiley](#). Pour une vue d'ensemble des références des articles jusqu'à 2018, voir cette remarquable [compilation](#) par [Phillip A. BLUM](#).
- [Helm1887] Hermann VON HELMHOLTZ, *numbering and measuring from an epistemological viewpoint*, Boston studies in the philosophy of science, vol. XXXVII, ed. Robert S. COHEN & Mark W. WARTOFSKY (1977), trad. Malcom F. LOWE (original title: *schriften zur erkenntnistheorie*, published by Julius SPRINGER, Berlin, 1921)
- [Mach1996] Moshé MACHOVER, *Set theory, logic, and their limitations*, 1996, Cambridge University Press (New York).
- [Matt2013] Adrian Richard David MATTHIAS, *Hilbert, Bourbaki and the scorning of Logic*, janv. 2013, article [disponible en ligne](#) sur ResearchGate
- [Mayb2000] John Penn MAYBERRY, *The foundations of mathematics in the theory of sets*, Cambridge University Press, Encyclopedia of Mathematics and its Applications (ed. by Gian-Carlo ROTA)
- [Milh1898] Gaston MILHAUD, *Essai sur les conditions et les limites de la certitude logique*, éd° Félix ALCAN (2° éd°), 1898, réimpression BnF & HACHETTE Livres
- [Pean1889] Giuseppe PEANO, *Arithmetices principia, nova methodo exposita* [*Les principes de l'arithmétique, exposés par une nouvelle méthode*], 1889, éd. Fratelli BOCCA (Turin)
- [Quin1980] Willard Van Orman QUINE, *Du point de vue logique — Neuf essais logico-philosophiques* (1980 : *From a logical point of view*), trad. sous la direction de Sandra LAUGIER, éd. VRIN (2003), bibliothèque des textes philosophiques



[Taha1938] Malba TAHAN, *L'Homme qui calculait*, 1938, trad. du portugais par Violante DO CANTO & Yves COLEMAN, 2001, éd. HACHETTE, coll. Jeunesse

[Weyl1926] Hermann WEYL, *Philosophy of Mathematics and Natural Science*, trad. de l'allemand par Olaf HELMER, introd. Franck WILCZEK, éd° Princeton University Press (1949, 2009)

[Witt1922] Ludwig WITTGENSTEIN, *Tractatus Logico-Philosophicus*, 1922, trad. Gilles-Gaston GRANGER, éd° GALLIMARD (1993), coll. TEL

[Witt1937-44] ID., *Remarques sur les fondements des mathématiques*, éd° posth. par Gertrude Elizabeth Margaret ANSCOMBE, Rush RHEES et Georg Henrik von WRIGHT, trad. Marie-Anne LESCOURRET, éd° GALLIMARD (2006), bibliothèque de philosophie, éd° originale Basil BLACKWELL Oxford (1956)