Révisions

Solution proposée.

Géométrie plane (CCP 2010). Premier réflexe : tout placer sur une figure que l'on complètera au fur et à mesure.

1. On a les égalités

$$\begin{aligned} z_I &= \frac{z_O+z_A}{2}=\frac{0+3+3i\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i, \\ OA &= |z_A-z_O|=|z_A|=3\left|1+i\sqrt{3}\right|=3\sqrt{1^2+\sqrt{3}^2}=6 \text{ et} \\ AB &= |z_B-z_A|=\left|\left(3+i\sqrt{3}\right)-\left(3+3i\sqrt{3}\right)\right|=\left|-2i\sqrt{3}\right|=2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

La deuxième permet de mettre z_A sous forme trigonométrique $z_A=6\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=6e^{i\frac{\pi}{3}}$.

2. La mesure principale de $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{AB}\right)$ vaut l'argument principal

$$\begin{aligned} \operatorname{Arg}\frac{z_{\overrightarrow{AB}}}{z_{\overrightarrow{OA}}} &= \operatorname{Arg}\frac{z_B-z_A}{z_A-z_O}=\operatorname{Arg}\frac{-2i\sqrt{3}}{3+3i\sqrt{3}}=\operatorname{Arg}\frac{-i}{1+i\sqrt{3}}=\operatorname{Arg}\left(\frac{-i\left(1-i\sqrt{3}\right)}{1^2+\sqrt{3}^2}\right) \\ &= \operatorname{Arg}\left(-\sqrt{3}-i\right)=\operatorname{Arg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=\operatorname{Arg}\left(-e^{i\frac{\pi}{6}}\right)=-\frac{5\pi}{6}. \end{aligned}$$

Sanity check sur le dessin : sens et valeur approchée de la mesure cherchée.

L'aire du triangle OAB vaut la moitié

$$\frac{1}{2}\det\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)=\frac{1}{2}\operatorname{Im}\left(\overline{z_{\overrightarrow{OA}}}z_{\overrightarrow{OB}}\right)=\frac{1}{2}\operatorname{Im}\left(\left(3-3i\sqrt{3}\right)\left(3+i\sqrt{3}\right)\right)=\frac{3\sqrt{3}-9\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}.$$

Sanity check : l'aire cherchée vaut la moitié de la base $AB=2\sqrt{3}$ multipliée la hauteur $d\left(O,(AB)\right)=x_A=x_B=3$.

3. Soit $(x,y)\in\mathbf{R}^2$. Posons $z:=x+iy$ et notons D l'ensemble donné. On a les équivalences

$$\begin{aligned} z\in D &\iff |z|=|z-z_A|\iff|z|^2=|z-z_A|^2\iff|z|^2=|z|^2-2\operatorname{Re}\left(z\overline{z_A}\right)+|a|^2 \\ &\iff \operatorname{Re}\left((x+iy)\left(3-3i\sqrt{3}\right)\right)=\frac{|a|^2}{2}\iff 3x+3\sqrt{3}y=\frac{36}{2} \\ &\iff x+\sqrt{3}y=6, \text{ ce qui est l'équation d'une droite de pente } -\frac{1}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Pour montrer cette droite contient I, il suffit de remarquer que $|z_I-z_A|=IA=IO=|z_I|$.

4. Remarquer dès à présent l'égalité $f=-e^{i\frac{\pi}{3}}\operatorname{Id}+z_B$.

On a les égalités

$$\begin{aligned} f(0) &= -e^{i\frac{\pi}{3}}0+z_B=3+i\sqrt{3}, \\ f(z_A) &= -e^{i\frac{\pi}{3}}6e^{i\frac{\pi}{3}}+z_B=-6+\left(3+i\sqrt{3}\right)=-3+i\sqrt{3} \text{ et} \\ f(z_I) &= -e^{i\frac{\pi}{3}}\frac{6e^{i\frac{\pi}{3}}}{2}+z_B=-3+\left(3+i\sqrt{3}\right)=i\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Ainsi f envoie O sur B, A sur le symétrique de B par rapport à $i\mathbf{R}$ et I sur le projeté de B sur l'axe $i\mathbf{R}$.

5. Soit $(z,z')\in\mathbf{C}^2$. On a les égalités

$$|f(z)-f(z')|=\left|\left(-e^{i\frac{\pi}{3}}z+z_B\right)-\left(-e^{i\frac{\pi}{3}}z+z_B\right)\right|=\left|-e^{i\frac{\pi}{3}}(z-z')\right|=|z-z'|.$$

6. La question précédente montre que f préserve les distances. Cela est confirmé par le cours : f est de la forme $\alpha \operatorname{Id} + \beta$, donc f est une quasi-isométrie positive de rapport $|\alpha| = 1$, à savoir une isométrie positive ; or $\alpha \neq 1$, donc f est une rotation. Son angle vaut $\operatorname{Arg} \alpha = \operatorname{Arg}\left(-e^{i\frac{\pi}{3}}\right) = -\frac{2\pi}{3}$. Son centre ω vérifie $\omega = f(\omega) = -e^{i\frac{\pi}{3}}\omega + z_B$, d'où $z_B = \left(1 + e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\omega$, *i. e.* $2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}} = \left(2\cos\frac{\pi}{6}e^{i\frac{\pi}{6}}\right)\omega$, *i. e.* $\omega = 2$.

Sanity check : les calculs de $f(0)$, $f(z_A)$ et $f(z_B)$ montrent que le milieu I de $[OA]$ est bien envoyé sur le milieu de $[f(O)\, f(A)]$ et que l'angle entre les droites (OA) et $(f(O)\, f(A))$ vaut environ $120°$ (et dans le bon sens si on oriente).

Polynômes (Centrale 2008).

1. On remarque que 1 est racine de P. On peut alors factoriser (ou bien effectuer directement la division euclidienne de P par $X - 1$)

$$\begin{aligned} P &= \left(X^3 - 1\right) + \left(X^2 - 1\right) \\ &= (X-1)\left(X^2 + X + 1\right) + (X-1)(X+1) \\ &= (X-1)\left(\left(X^2 + X + 1\right) + (X+1)\right) \\ &= (X-1)\left(X^2 + 2X + 2\right) \\ &= (X-1)\left((X+1)^2 + 1\right). \end{aligned}$$

Le second facteur n'a pas de racine réelle (somme de carrés non tous nuls), ce qui finit de répondre à la question. (On aurait pu factoriser ce second terme $(X+1-i)(X+1+i)$, d'où $\{a, b\} = \{-1 \pm i\}$.)

2. Il s'agit de montrer que les "deux" racines de P autres que 1 sont distinctes, ce qui revient à dire que toute racine non réelle de P est simple. Or les racines de $P' = 3X^2 + 2X = 3X\left(X + \frac{2}{3}\right)$ sont réelles, donc diffèrent de toute racine non réelle de P, ce qui conclut.

Autre idée : le trinôme $\frac{P}{X-1} = X^2 + 2X + 2$ a pour discriminant (réduit) $1^2 - 2$ qui est non nul, donc possède bien deux racines (distinctes).

3. Montrons que (L_a, L_b, L_1) est libre, ce qui conclura puisque sa longueur 3 vaut la dimension de $\mathbf{C}_2[X]$.

Soit $(\alpha, \beta, \lambda) \in \mathbf{C}^3$ tel que $\alpha L_a + \beta L_b + \lambda L_1 = 0$. Évaluer en a donne $\alpha(a-1)(a-b) = 0$, d'où $\alpha = 0$ puisque $a, b, 1$ sont distincts. De même, évaluer en b puis en 1 donne $\beta = 0$ et $\alpha = 0$, *c. q. f. d.*.

4. Cherchons les coordonnées du R désiré dans la base précédente. Soit $(\alpha, \beta, \lambda) \in \mathbf{C}^3$. Posons $R := \alpha L_a + \beta L_b + \lambda L_1$. On a les équivalences

$$\left\{\begin{array}{l} R(1) = 1 \\ R(a) = b \\ R(b) = a \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \lambda(1-a)(1-b) = 1 \\ \alpha(a-1)(a-b) = b \\ \beta(\beta-1)(\beta-a) = a \end{array}\right. \iff R = \frac{(X-1)(X-b)}{(a-1)(a-b)} + \frac{(X-1)(X-a)}{(b-1)(b-a)} + \frac{(X-a)(X-b)}{(a-1)(b-1)}.$$

5. On veut montrer que $(X-a)(X-b)(X-1)$ divise $R \circ R - X$. Puisque les racines de P sont toutes simples, il suffit de montrer de montrer que chaque facteur divise $R \circ R - X$, autrement dit que les racines de P sont racines de $R \circ R - X$. Or on a les égalités

$$\begin{aligned} [R \circ R - X](a) &= R(R(a)) - a = R(b) - a = 0, \\ [R \circ R - X](b) &= R(R(b)) - b = R(a) - b = 0 \text{ et} \\ [R \circ R - X](1) &= R(R(1)) - 1 = R(1) - 1 = 0, \ \textit{c. q. f. d.}. \end{aligned}$$

Intégrale multiple (ENSAIT 2009). Remarquer que l'intégrande $\frac{\sqrt{x^2+y^2}dx\ dy\ dz}{(x^2+y^2+\lambda^2)(z^2+\lambda^2)}$ est adimensionnée si l'on dimensionne λ comme x, y et z. Il serait donc surprenant que le résultat dépende de λ : deux longueurs permettent d'écrire des quotients (pour tuer la dimension) mais comment procéder de même avec *une seule* longueur ? Cela justifiera le reparamétrage $Z := \frac{z}{\lambda}$ normalisant ci-après.

Le domaine D est invariant par rotation autour de l'axe des cotes et se reparamètre en coordonnées cylindriques par $r \leq z \leq \lambda$: il s'agit du volume compris entre le cône d'axe celui des cotes et d'angle $\frac{\pi}{4}$ (avec cet axe) et le plan horizontal de cote λ. L'intégrale cherchée vaut donc, après division par 2π (va se simplifier grâce à la symétrie de révolution)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\frac{\sqrt{x^2+y^2}dx\ dy\ dz}{\left(x^2+y^2+\lambda^2\right)\left(z^2+\lambda^2\right)} &= \frac{1}{2\pi}\int_{\theta=-\pi}^{\pi}\int_{r=0}^{\lambda}\int_{z=r}^{\lambda}\frac{r\ r\ dr\ d\theta\ dz}{\left(r^2+\lambda^2\right)\left(z^2+\lambda^2\right)} \\
&\overset{Z:=\frac{z}{\lambda}}{\underset{R:=\frac{r}{\lambda}}{=}} \int_{R=0}^{1}\int_{Z=R}^{1}\frac{\lambda R\ \lambda R\ \lambda dR\ \lambda dZ}{\lambda^2\left(R^2+1\right)\ \lambda^2\left(Z^2+1\right)} \\
&= \int_0^1\frac{R^2}{R^2+1}\int_R^1\frac{dZ}{Z^2+1}dR \\
&= \int_0^1\frac{\left(R^2+1\right)-1}{R^2+1}\left[\arctan Z\right]_{Z=R}^{1}dR \\
&= \int_0^1\left(1-\arctan' R\right)\left(\frac{\pi}{4}-\arctan R\right)dR \\
&= \int_0^1\left(\frac{\pi}{4}-\arctan R-\frac{\pi}{4}\arctan' R+\arctan R\arctan' R\right)dR.
\end{aligned}$$

Le calcul se ramène ainsi à celui de quatre intégrales :

$$\begin{aligned}
\int_0^1\frac{\pi}{4}dR &= \frac{\pi}{4}, \\
\int_0^1\arctan' R\ dR &= \left[\arctan R\right]_{R=0}^{1} = \frac{\pi}{4}, \\
\int_0^1\arctan R\arctan' R\ dR &= \int_{R=0}^{1}d\left(\frac{\left(\arctan R\right)^2}{2}\right) = \left[\frac{a^2}{2}\right]_{a=\arctan 0}^{\arctan 1} = \frac{1}{2}\frac{\pi^2}{16}\text{ et} \\
\int_0^1\arctan R\ dR &\overset{\text{IPP}}{=} \left[R\arctan R\right]_0^1-\int_0^1\frac{R\ dR}{R^2+1} = \frac{\pi}{4}-\left[\frac{1}{2}\ln\left(R^2+1\right)\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}-\frac{\ln 2}{2}.
\end{aligned}$$

Finalement, l'intégrale cherchée vaut

$$\begin{aligned}
&2\pi\int_0^1\left(\frac{\pi}{4}-\arctan R-\frac{\pi}{4}\arctan' R+\arctan R\arctan' R\right) \\
=\ &2\pi\left(\frac{\ln 2}{2}-\frac{\pi}{4}\frac{\pi}{4}+\frac{\pi^2}{32}\right) = 2\pi\left(\frac{\ln 2}{2}-\frac{\pi^2}{32}\right) \\
=\ &\pi\left(\ln 2-\frac{\pi^2}{16}\right)\simeq 0,24.
\end{aligned}$$

Coniques.

1. La conique Γ a une équation de la forme $y^2=2px$ (avec $p:=9$), donc est une parabole centrée en l'origine, d'axe celui des abscisses (et tournée vers les abscisses *positives*). Son foyer est le point $\left(\frac{p}{2},0\right)$ et sa directrice est la droite verticale d'abscisse $-\frac{p}{2}$.
2. Supposons $a=b$. Alors $18a^2=18b^2$, donc les points A et B ont même abscisses et ordonnées, ce qui est impossible vu qu'ils sont distincts. Les lettres a, b, c et d jouant un rôle symétrique, on en déduit le résultat.

3. On a les équivalences

$$\begin{array}{cl}
 & A,B,C,D \text{ sont sur un même cercle} \\
\iff & \exists R\geq 0,\ \exists\,(u,v)\in\mathbf{R}^2,\ A,B,C,D \text{ sont sur le cercle de centre } (u,v) \text{ et de rayon } R \\
\iff & \exists R\geq 0,\ \exists\,(u,v)\in\mathbf{R}^2,\ \forall P\in\{A,B,C,D\},\ (x_P-u)^2+(y_P-v)^2=R^2 \\
\underset{\text{sont sur } \mathcal{C}}{\overset{\text{puisque } A,B,C,D}{\iff}} & \exists R\geq 0,\ \exists\,(u,v)\in\mathbf{R}^2,\ \forall P\in\{A,B,C,D\},\ \left(\frac{y_P^2}{18}-u\right)^2+(y_P-v)^2=R^2 \\
\iff & \exists R\geq 0,\ \exists\,(u,v)\in\mathbf{R}^2,\ \forall y\in\{a,b,c,d\},\ \left(\frac{y^2}{18}-u\right)^2+(y-v)^2=R^2 \\
\iff & \exists R\geq 0,\ \exists\,(u,v)\in\mathbf{R}^2,\ \forall y\in\{a,b,c,d\},\ \left(y^2-18u\right)^2+(18y-18v)^2=R^2 \\
\underset{\text{et } V:=18v}{\overset{\text{poser } U:=18u}{\iff}} & \exists R\geq 0,\ \exists\,(U,V)\in\mathbf{R}^2,\ \forall y\in\{a,b,c,d\},\ \left(y^2-U\right)^2+(18y-V)^2=R^2.
\end{array}$$

4. Soient $R\geq 0$ et $(u,v)\in\mathbf{R}^2$ comme à la question 3. Alors a, b, c et d sont racines du polynôme

$$\left(X^2-u\right)^2+(18X-v)^2-R^2=X^4+(324-2u)\,X^2-36vX+\left(u^2+v^2-R^2\right).$$

Puisque a, b, c et d sont deux à deux distincts, ce sont *les* racines du polynôme précédent, lequel vaut par conséquent

$$(X-a)\,(X-b)\,(X-c)\,(X-d)=X^4-(a+b+c+d)\,X^3+?X^2+?X+?.$$

Identifier les coefficients en X^3 donne alors $a+b+c+d=0$.

5. Notons d' l'ordonnée de D'. Les points A, B, C et D' étant sur un même cercle et deux à deux distincts, la question précédente permet d'affirmer que $a+b+c+d'=0$. En soustrayant l'hypothèse $a+b+c+d=0$, on obtient $d=d'$. Or D et D' sont tous deux sur Γ, donc ont même abscisse $18d^2$, donc sont égaux. On en déduit que A, B, C et $D=D'$ sont sur un même cercle.

Variations (CCP 2010).

1. Soit $t\in\mathbf{R}$. Le réel $g(t)=t\ln t-(t+1)\ln(t+1)$ fait sens ssi les logarithmes font chacun sens, *i. e.* ssi $t>0$ et $t+1>0$, *i. e.* ssi $t>0$. Ainsi g est-elle définie sur $\mathbf{R}_+^*$ (et y est C^∞ comme les polynômes et ln).

Soit $t>0$. On a les égalités

$$g'(t)=\frac{\partial}{\partial t}(t\ln t)-\frac{\partial}{\partial(t+1)}((t+1)\ln(t+1))=(\ln t+1)-(\ln(t+1)+1)=\ln\frac{t}{t+1}$$

et les équivalences

$$g'(t)<0\iff\ln\frac{t}{t+1}<0\iff\frac{t}{t+1}<1\overset{\text{car } t+1>0}{\iff}t<t+1\iff 0<1,\text{ ce qui est vrai,}$$

ce qui montre que g croît strictement. Vu par ailleurs les tendances, $t\ln t\overset{t\to 0}{\longrightarrow}0$ et $s\ln s\overset{s\to 1}{\longrightarrow}0$, desquelles on déduit $g(t)\overset{t\to 0}{\longrightarrow}0$, on peut conclure à la positivité de g.

2. Soit $t\in\mathbf{R}$. Le réel $f(t)=\frac{\ln(t+1)}{\ln t}$ fait sens ssi numérateur fait sens et si le dénominateur fait sens et est non nul, *i. e.* ssi $t+1>0$ et $t>0$ et $\ln t\neq 0$, *i. e.* ssi $t>0$ et $t\neq 1$. On en déduit $D=]0,1[\cup]1,\infty[$.

3. Soit $t\in D$. Lorsque $t\to 0$, on a la tendance

$$f(t)=\frac{\ln(t+1)}{\ln t}\sim\frac{t}{\ln t}=t\frac{1}{\ln t}\longrightarrow 0.$$

Lorsque $t\to\infty$, on a la tendance

$$f(t)=\frac{\ln t+\ln\left(\frac{1}{t}+1\right)}{\ln t}=1+\underbrace{\frac{1}{\ln t}}_{\longrightarrow 0}\quad\underbrace{\ln\left(\underbrace{\frac{1}{t}+1}_{\longrightarrow 1}\right)}_{\longrightarrow\ln 1\text{ car ln continue}}\quad\longrightarrow 1.$$

Lorsque $t \to 1^+$, on a la tendance $\ln t \longrightarrow 0^+$, d'où la tendance

$$f(t) = \frac{\ln(t+1)}{\ln t} \sim \underbrace{\ln 2}_{>0} \frac{1}{\underbrace{\ln t}_{\longrightarrow \infty}} \longrightarrow \infty.$$

On montrerait de même $f(t) \overset{t \to 1^-}{\longrightarrow} -\infty$

4. Il reste à déterminer les variations de f. Soit $t \in D$. On a

$$f'(t) = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\ln(t+1)}{\ln t} = \frac{\frac{1}{t+1} \ln t - \ln(t+1) \frac{1}{t}}{(?)^2} = \frac{t \ln t - (t+1) \ln(t+1)}{\underbrace{t(t+1)}_{>0} (?)^2} = \underbrace{(?)}_{>0} g(t) < 0,$$

ce qui montre que f décroît sur chacun des intervalles où elle est définie. On en déduit le tableau attendu :

t	0		1		∞
			∞		
$f(t)$				$\searrow$	1
	0	$\searrow$			
			$-\infty$		

.

5. On cherche les réels où f admet une limite. Seul 0 répond à la question : on définirait ainsi $f(0) := \lim_0 f = 0$.

6. On regarde le taux d'accroissement de f en 0. Soit $t \in D$ non nul. On a

$$\frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \frac{\ln(t+1)}{t \ln t} \sim \frac{t}{t \ln t} = \frac{1}{\ln t} \overset{t \to 0}{\longrightarrow} 0,$$

ce qui montre que f prolongé sur $[0,1[\cup]1,\infty[$ est dérivable en 0 et y admet une tangente horizontale.

Suites (CCP 2008).

1. Puisque a (le premier terme souhaité) appartient à $[0,1]$, il suffit de montrer que ce dernier segment est stable par la fonction $f := \frac{\mathrm{Id} + \cos}{2}$. Soit $t \in [0,1]$. Puisque $\frac{\pi}{2} > \frac{3}{2} > 1$, on a $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, d'où $0 \leq \cos t \leq 1$; ajouter les comparaisons $0 \leq t \leq 1$ puis diviser par 2 conclut.

2. Supposons (x_n) monotone : étant à valeurs dans $[0,1]$, cette suite monotone est bornée, donc converge. Or la fonction f est continue, donc la limite de (x_n) doit être fixe par f, ce qui s'écrit $\frac{\ell + \cos \ell}{2} = \ell$, ou encore $\cos \ell = \ell$, ce qui conclura. Montrons à présent que (x_n) est monotone.

   Heuristique : si a est inférieur à la limite de (x_n), alors la monotonie de (x_n) imposera sa croissance ; de même, si $a > \lim x_n$, alors x_n devra décroitre. Il va donc falloir discuter selon la position relative de a par rapport à $\lim x_n$.

   La fonction $\cos - \mathrm{Id}$ est continue et décroît strictement sur $[0,1]$ (comme somme de deux fonctions strictement décroissantes), prend une valeur positive en 0 (1) et une valeur négative en 1 ($\cos ? - 1$), donc s'annule une unique fois d'après le théorème des valeurs intermédiaires. Appelons λ son unique zéro. Alors la différence $x_{n+1} - x_n = \frac{\cos x_n - x_n}{2}$ est du signe de $x_n - \lambda$ pour tout $n \in \mathbf{N}$: montrons que ce signe ne dépend pas de n, ce qui conclura à la monotonie cherchée.

   La fonction f est dérivable de dérivée $\frac{1 - \sin}{2} \geq 0$, donc préserve les comparaisons. En remarquant qu'elle envoie λ sur $\frac{\cos \lambda + \lambda}{2} = \frac{\lambda + \lambda}{2} = \lambda$, on en déduit les implications

$$\underline{a \leq \lambda} \Longrightarrow f(a) \leq f(\lambda) \Longrightarrow \underline{x_1 \leq \lambda} \Longrightarrow f(x_1) \leq f(\lambda) \Longrightarrow \underline{x_2 \leq \lambda} \Longrightarrow \cdots,$$

   d'où par récurrence l'implication $a \leq \lambda \Longrightarrow \forall n \in \mathbf{N},\ x_n \leq \lambda$ (et *idem* pour l'autre signe), *c. q. f. d.*.

3. Soit $x \in \mathbf{R}$ solution de l'équation ci-dessus. Alors $x = \cos x = [-1,1]$. D'autre part, si $x < 0$, alors $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$, d'où $\cos x > 0$, ce qui est contradictoire. On doit avoir $x \in [0,1]$. Or on a déjà montré plus haut que l'équation $x = \cos x$ avait exactement une solution dans $[0,1]$, ce qui permet de répondre à la question : une solution dans les deux cas.

4. Soit $n \in \mathbf{N}$. On a

$$|x_{n+1} - \lambda| = |f(x_n) - f(\lambda)| \underset{\text{finis}}{\overset{\text{accroissements}}{=}} |f'(?)|\ |x_n - \lambda| \overset{\text{récurrence}}{\leq} (\max |f'|)^{n+1} |x_0 - \lambda| .$$

Il reste à observer que $f' = \frac{1-\sin}{2}$ prend ses valeurs dans $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, donc le maximum ci-dessus peut être majoré par $\frac{1}{2}$. Puisque par ailleurs x_n et λ sont dans $[0,1]$, leur distance est majorée par la longueur 1 de ce segment. On en déduit $\forall k \in \mathbf{N}^*,\ |x_k - \lambda| \leq \frac{1}{2^k}$, égalité qui reste vraie en remplaçant k par 0, ce qui conclut en posant $C := \frac{1}{2}$.