Révisions

Géométrie plane (CCP 2010). Dans le plan, on appelle A et B les points d'affixes respectives $3+3i\sqrt{3}$ et $3+i\sqrt{3}$. On note I le milieu de $[OA]$. On note $f : z \mapsto -\frac{1+i\sqrt{3}}{2}z+3+i\sqrt{3}$.

1. *Donner l'affixe de I puis déterminer les distances OA et AB.*
2. *Donner une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AB}\right)$ et calculer l'aire du triangle OAB.*
3. *Montrer que l'ensemble $\{z \in \mathbf{C} \ ; \ |z| = |z_A|\}$ est une droite passant par I.*
4. *Calculer $f(0)$, $f(z_A)$ et $f(z_I)$.*
5. *Montrer $\forall (z, z') \in \mathbf{C}^2$, $|f(z) - f(z')| = |z - z'|$.*
6. *Que dire de f ?*

Polynômes (Centrale 2008). On note $P := X^3 + X^2 - 2$. Soient a et b deux racines distinctes non réelles de P. On pose $L_a := (X-1)(X-b)$, $L_b := (X-1)(X-a)$ et $L_1 := (X-a)(X-b)$.

1. *Montrer que P admet une unique racine réelle que l'on détermininera.*
2. *Justifier l'invocation de a et b.*
3. *Montrer que (L_a, L_b, L_1) est une base de $\mathbf{C}_2[X]$.*
4. *Expliciter un polynôme $R \in \mathbf{C}_2[X]$ tel que $R(1) = 1$, $R(a) = b$ et $R(b) = a$.*
5. *Soit R comme en 4. : montrer que P divise $R \circ R - X$.*

Intégrale multiple (ENSAIT 2009). *Soit $\lambda \in \mathbf{R}_+$. On pose* $D := \left\{(a,b,c) \ ; \ 0 \leq c \leq \lambda \text{ et } a^2+b^2=c^2\right\}$. *Calculer* $\iiint_D \frac{\sqrt{x^2+y^2}dx\ dy\ dz}{(x^2+y^2+z^2)(z^2+\lambda^2)}$.

Coniques. On appelle Γ le lieu des points (x,y) du plan $\mathbf{R}^2$ tels que $y^2 = 18x$. Soient A, B, C et D quatre points de Γ deux à deux distincts d'ordonnées respectives a, b, c et d.

1. *Comment s'appelle la conique Γ ? Préciser ses foyers et directrices.*
2. *Montrer que les ordonnées a, b, c et d sont deux à deux distinctes.*
3. *Montrer que les points A, B, C et D sont sur un même cercle ssi*
$$\exists R \geq 0,\ \exists (u,v) \in \mathbf{R}^2,\ \forall y \in \{a,b,c,d\},\ \left(y^2-u\right)^2 + (18y-v)^2 = R^2.$$
4. *On suppose que A, B, C et D sont sur un même cercle. Montrer que a, b, c et d sont racines d'un polynôme de degré 4 sans terme en X^3. En déduire l'égalité $a+b+c+d=0$.*
5. *On suppose $a+b+c+d=0$. On admet que les trois points A, B et C appartiennent à un même cercle qui recoupe Γ en un autre point qui sera noté D'. En utilisant la question précédente et le point D', montrer que les points A, B, C et D sont sur un même cercle.*

Variations (CCP 2010). Le but est étudier la fonction $f : t \mapsto \frac{\ln(t+1)}{\ln t}$.

1. *Donner le domaine de définition, les variations et le signe de la fonction $g : t \mapsto t\ln t - (t+1)\ln(t+1)$.*
2. *Déterminer le domaine de définition de f (on l'appellera D).*
3. *Trouver les limites de f aux bords de D.*
4. *Tracer le tableau de variation de f.*
5. *Où f est-elle prolongeable par continuité ?*
6. *Soit a un tel réel : le prolongement de f en a est-il dérivable en a ?*

Suites (CCP 2008). Soit $a \in [0,1]$.

1. *Montrer qu'il existe une unique suite $(x_n) \in [0,1]^{\mathbf{N}}$ telle que* $\begin{cases} x_0 = a \\ \forall n \in \mathbf{N},\ x_{n+1} = \frac{x_n + \cos x_n}{2} \end{cases}$.

   On invoque une telle suite (x_n).
2. *Montrer que (x_n) est monotone et tend vers une solution de l'équation $\lambda = \cos\lambda$ d'inconnue réelle λ.*
3. *Combien l'équation précédente a-t-il de solution dans $\mathbf{R}$? dans $[0,1]$?*
4. *Montrer $\exists C \in \left]0,1\right[,\ \forall n \in \mathbf{N},\ |x_n - \lim x_p| \leq C^n$.*