Lois de composition

(T. G. 9)

Solution proposée.

1. *cf.* cours.

2. Soient u, v, w trois complexes.

Puisque la loi $\natural$ ne prend en argument que *deux* complexes, l'expression $u\natural v\natural w$ pourrait désigner $u\natural(v\natural w)$ ou $(u\natural v)\natural w$ (on imagine difficilement autre chose). Comme il y a *a priori* une ambiguïté, la question est donc de savoir si cette ambiguïté en est vraiment une : or on a les équivalences

$$\begin{aligned}
u\natural(v\natural w) = (u\natural v)\natural w &\iff \overline{u\overline{vw}} = \overline{\overline{uv}w} \\
&\iff \overline{u}vw = uv\overline{w} \\
&\iff \overline{u}w = u\overline{w} \text{ ou } v = 0 \\
&\iff \overline{u}w = \overline{\overline{u}w} \text{ ou } v = 0 \\
&\iff \operatorname{Im} \overline{u}w = 0 \text{ ou } v = 0 \\
&\iff \det(u, w) = 0 \text{ ou } v = 0 \\
&\iff u \parallel w \text{ ou } v = 0,
\end{aligned}$$

ce qui montre que l'ambiguïté ne peut pas toujours être levée. Par exemple, si $(u, v, w) = (1, 1, i)$, on aura

$$u\natural(v\natural w) = \overline{1\overline{1i}} = i \neq -i = \overline{\overline{11}i} = (u\natural v)\natural w,$$

ce qui montre que la loi $\natural$ n'est pas associative.

3. Comme à l'exercice précédent, la question est de savoir si la loi $\ddagger$ est associative. (Elle est clairement commutative.)

Observer déjà que, pour tout partie $F \subset E$, on a $F\ddagger\emptyset = \emptyset$.

Soient X, Y, Z trois parties de E. D'après l'observation ci-dessus, les composés $X\ddagger(Y\ddagger Z)$ et $(X\ddagger Y)\ddagger Z$ seront égaux (alors à $\emptyset$) si l'une des trois parties X, Y ou Z est vide. Essayons d'éviter cela. Par exemple, si $X = Y \neq \emptyset$ et si $Z \neq \emptyset = X \cap Z$, on aura d'une part $X\ddagger Y = X\ddagger X = E$, d'où $(X\ddagger Y)\ddagger Z = E\ddagger Z = E$, d'autre part $Y\ddagger Z = X\ddagger Z = \emptyset$, d'où $X\ddagger(Y\ddagger Z) = X\ddagger\emptyset = \emptyset$, de sorte que $X\ddagger(Y\ddagger Z) \neq (X\ddagger Y)\ddagger Z$ (sauf si E est vide). Pour réaliser ces conditions, on peut par exemple considérer deux éléments a et b distincts dans E et supposer $X = \{a\} = Y$ et $Z = \{b\}$, ce qui est possible ssi E possède au moins deux éléments.

Si E est vide, la loi $\ddagger$ est constamment égale à $E = \emptyset$ et est alors associative.

Si E est un singleton, alors $\mathfrak{P}(E)$ vaut $\{\emptyset, E\}$ et la table de $\ddagger$ coïncide avec celle

$\Rsh$	$\emptyset$	E
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
E	$\emptyset$	E

de l'intersection qui est associative.

Conclusion : la loi $\ddagger$ est associative ssi E possède au plus un élément.

4. Pour tous réels a et b, on note $a * b := a + b + ab$. On demande de calculer tous les composés possibles pour la loi $*$ des nombres $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{2013}$.

La somme et le produit réels étant commutatifs, il est clair que $*$ l'est aussi.

Montrons que $*$ est associatif. Soient α, β, γ trois réels. On a

$$\begin{aligned}
\alpha * (\beta * \gamma) &= \alpha * (\beta\gamma + \beta + \gamma) = \alpha(\beta\gamma + \beta + \gamma) + \alpha + (\beta\gamma + \beta + \gamma) \\
&= \alpha\beta\gamma + \underline{\alpha\beta} + \underline{\alpha\gamma} + \alpha + \underline{\beta\gamma} + \beta + \gamma \text{ d'une part,} \\
(\alpha * \beta) * \gamma &= (\alpha\beta + \alpha + \beta) * \gamma = (\alpha\beta + \alpha + \beta)\gamma + (\alpha\beta + \alpha + \beta) + \gamma \\
&= \alpha\beta\gamma + \underline{\alpha\gamma} + \underline{\beta\gamma} + \underline{\alpha\beta} + \alpha + \beta + \gamma\text{, d'autre part, ce qui conclut.}
\end{aligned}$$

Il n'y a donc qu'un seul composé à trouver : à nous de trouver un ordre et une association pour que le calcul se passe bien. Expérimentons : on a $1 * \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} = 2$, $1 * \frac{1}{2} * \frac{1}{3} = 2 * \frac{1}{3} = 2\frac{1}{3} + 2 + \frac{1}{3} = 3$;

on a envie de montrer l'énoncé E_n défini pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ par $1 * \frac{1}{2} * \cdots * \frac{1}{n} = n$ (on vient de montrer E_2 et E_3). Soit $n \geq 2$ un entier tel que E_n. On a alors

$$\begin{aligned} 1 * \frac{1}{2} * \cdots * \frac{1}{n+1} &= \left(1 * \frac{1}{2} * \cdots * \frac{1}{n}\right) * \frac{1}{n+1} \\ &= n * \frac{1}{n+1} \qquad \text{d'après } E_n \\ &= n\frac{1}{n+1} + n + \frac{1}{n+1} \\ &= n + \frac{n}{n+1} + \frac{1}{n+1} \\ &= n+1, \text{ d'où } E_{n+1}. \end{aligned}$$

Conclusion : le dernier nombre écrit au tableau sera (d'après E_{2013}) toujours 2013.

5. Soient a et b dans $]-1,1[$. On a alors $|ab| = |a|\,|b| < 1$, d'où $ab > -1$, ce qui donne sens à $\frac{a+b}{1+ab} = a \natural b$. Ce dernier reste dans $]-1,1[$ ssi $\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)^2 < 1$, *i. e.* ssi $a^2 + 2ab + b^2 < 1 + 2ab + a^2b^2$, ou encore ssi $0 < \underbrace{(1-a^2)}_{>0}\underbrace{(1-b^2)}_{>0}$, ce qui est vrai. Par conséquent, $\natural$ est bien une application de $]-1,1[\,^2$ vers $]-1,1[$.

Vu que la somme et le produits sont commutatifs, $\natural$ l'est aussi clairement.

Soient x, y, z dans $]-1,1[$. On a

$$\begin{aligned} \text{d'une part} \qquad x\natural(y\natural z) = x\natural\frac{y+z}{1+yz} = \frac{x + \frac{y+z}{1+yz}}{1 + x\frac{y+z}{1+yz}} = \frac{x+xyz+y+z}{1+yz+xy+xz}, \\ \text{d'autre part} \qquad (x\natural y)\natural z = \frac{x+y}{1+xy}\natural z = \frac{\frac{x+y}{1+xy} + z}{1 + \frac{x+y}{1+xy}z} = \frac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz}, \end{aligned}$$

d'où l'égalité $x\natural(y\natural z) = (x\natural y)\natural z$. Nous avons montré l'associativité de $\natural$.

Soit $\lambda \in\,]-1,1[$. On a $\lambda\natural 0 = \frac{\lambda+0}{1+\lambda 0} = \lambda$ et $\lambda\natural(-\lambda) = \frac{\lambda+(-\lambda)}{1+\lambda(-\lambda)} = 0$, ce qui montre d'une part que 0 est neutre pour $\natural$ (il n'y a pas besoin de vérifier les deux côtés car $\natural$ est commutative), d'autre part que l'inverse d'un réel de $]-1,1[$ pour la loi $\natural$ est son opposé (même commentaire pour ne vérifier qu'un seul côté).

Finalement, le magma $]-1,1[$ est un groupe pour $\natural$.

6. La loi $\top : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (a,b) & \longmapsto & \sqrt[3]{a^3+b^3} \end{array}\right.$ est bien définie car l'application $\sqrt[3]{\cdot}$ est définie sur tout $\mathbf{R}$ et est commutative (car $+$ l'est).

Montrons que $\top$ est associative. Soient a, b, c trois réels. On a

$$\begin{aligned} \text{d'une part} \qquad a \top (b \top c) = a \top \sqrt[3]{b^3+c^3} = \sqrt[3]{a^3 + \sqrt[3]{b^3+c^3}^3}, \\ \text{d'autre part} \qquad (a \top b) \top c = \sqrt[3]{a^3+b^3} \top c = \sqrt[3]{\sqrt[3]{a^3+b^3}^3 + c^3}, \end{aligned}$$

d'où l'égalité $a \top (b \top c) = \sqrt[3]{a^3+b^3+c^3} = a \top (b \top c)$.

Soit $s \in \mathbf{R}$. On a $s \top 0 = \sqrt[3]{s^3+0^3} = s$ et $s \top (-s) = \sqrt[3]{s^3+(-s)^3} = \sqrt[3]{s^3-s^3} = 0$, ce qui montre d'une part que 0 est neutre pour $\top$ (il n'y a pas besoin de vérifier les deux côtés car $\top$ est commutative), d'autre part que l'inverse d'un réel pour la loi $\top$ est son opposé (même commentaire pour ne vérifier qu'un seul côté).

Finalement, $\mathbf{R}$ est un groupe pour $\top$.

7. Notons $\square$ l'application de l'énoncé. Elle est bien définie vu les hypothèses sur φ et est commutative (car $+$ l'est).

Montrons que $\square$ est associative. Soit $(a,b,c) \in E^3$. On a

$$\begin{aligned} \text{d'une part} \qquad a\square(b\square c) = a\square\varphi\left(\varphi^{-1}(b) + \varphi^{-1}(c)\right) = \varphi\left(\varphi^{-1}(a) + \varphi^{-1}\left(\varphi\left(\varphi^{-1}(b)+\varphi^{-1}(c)\right)\right)\right), \\ \text{d'autre part} \qquad (a\square b)\square c = \varphi\left(\varphi^{-1}(a)+\varphi^{-1}(b)\right)\square c = \varphi\left(\varphi^{-1}\left(\varphi\left(\varphi^{-1}(a)+\varphi^{-1}(b)\right)\right) + \varphi^{-1}(c)\right), \end{aligned}$$

d'où l'égalité $a\square(b\square c) = \varphi\left(\varphi^{-1}(a)+\varphi^{-1}(b)+\varphi^{-1}(c)\right) = (a\square b)\square c$.

Montrons que $\varphi(0)$ est neutre pour $\Box$. Soit $x \in E$. On a

$$x \Box \varphi(0) = \varphi\left(\varphi^{-1}(x) + \varphi^{-1}(\varphi(0))\right) = \varphi\left(\varphi^{-1}(x) + 0\right) = \varphi\left(\varphi^{-1}(x)\right) = x.$$

Soit $e \in E$. Montrons que $\varphi\left(-\varphi^{-1}(e)\right)$ est l'inverse de e pour $\Box$: on a

$$e \Box \varphi\left(-\varphi^{-1}(e)\right) = \varphi\left(\varphi^{-1}(e) + \varphi^{-1}\left(\varphi\left(-\varphi^{-1}(e)\right)\right)\right) = \varphi\left(\varphi^{-1}(e) - \varphi^{-1}(e)\right) = \varphi(0).$$

Montrons que φ est un morphisme du groupe $(\mathbf{R}, +)$ vers le groupe $(E, \Box)$. Soient a et b deux réels. On a alors

$$\varphi(a) \Box \varphi(b) = \varphi\left(\varphi^{-1}(\varphi(a)) + \varphi^{-1}(\varphi(b))\right) = \varphi(a+b).$$

Puisque φ est par hypothèse bijectif, c'est un isomorphisme de groupes.

Par conséquent, si une propriété des réels s'écrit avec du $+$ (uniquement), en appliquant φ sur cette propriété, on obtiendra la même propriété où le symbole $+$ a été remplacé par $\Box$ (et où les réels ont été remplacés par leurs images respectives par φ). Par exemple, 0 étant neutre pour $+$, son image $\varphi(0)$ sera neutre pour $\Box$.

Lorsque $\varphi = \sqrt[3]{\cdot}$, on retrouve la question 6. Lorsque $\varphi = \operatorname{th}$, on retrouve la question 5 vu que, étant deux réels a et b, on a

$$\operatorname{th}(\operatorname{argth} a + \operatorname{argth} b) = \frac{\operatorname{th} \operatorname{argth} a + \operatorname{th} \operatorname{argth} b}{1 + (\operatorname{th} \operatorname{argth} b)(\operatorname{th} \operatorname{argth} b)} = \frac{a+b}{1+ab}.$$

8. Soit G un groupe dont on note i l'inversion.

Supposons G commutatif. Soient g et h dans G. On a alors

$$i(gh) = (gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1} = g^{-1}h^{-1} = i(g)\, i(h),$$

donc i est un morphisme de groupes.

Supposons réciproquement que i est un morphisme de groupes. Soit $(a, b) \in G$. On a

$$ab = i\left(a^{-1}\right) i\left(b^{-1}\right) = i\left(a^{-1}b^{-1}\right) = i\left((ba)^{-1}\right) = \left((ba)^{-1}\right)^{-1} = ba,$$

ce qui montre que G est commutatif.