Lois de composition

(T. G. 9)

1. *Reprendre tous les exemples du cours (en particulier ceux ensemblistes et matriciels) et s'assurer qu'ils sont compris (démontrer ce qu'il y a à démontrer).*
2. *On définit pour tous complexe a et b un complexe $a \natural b := \overline{ab}$. Quel sens peut-on donner à $u \natural v \natural w$ lorsque u, v, w sont des complexes ?*
3. *Soit E un ensemble. Si A et B sont deux parties de E, on pose $A \ddagger B := \left\{ \begin{array}{c} \emptyset \text{ si } A \cap B = \emptyset \\ E \text{ sinon} \end{array} \right.$. Quel sens peut-on donner à $P \ddagger Q \ddagger R \ddagger S$ si P, Q, R, S sont des parties de E ?*
4. *On écrit au tableau les 2013 nombres $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{2013}$. On efface deux de ces nombres, x et y, et on écrit alors le nombre $x + y + xy$. On effectue 2012 fois cette opération ; il reste un nombre au tableau. Quels sont les nombres qui peuvent, ainsi, être obtenus ?*
5. *On définit pour tous réels a et b un réel $a \natural b := \frac{a+b}{1+ab}$. Montrer que $\natural$ est une l. c. i. sur $]-1, 1[$ et étudier ses propriétés (commutativité, associativité, neutre, inversibles).*
6. *Même question avec la loi $(f, g) \mapsto \sqrt[3]{f^3 + g^3}$ définie sur $\mathbf{R}$.*
7. *Soit φ une bijection de $\mathbf{R}$ vers un ensemble E. Montrer que l'application*

$$\left\{ \begin{array}{ccc} E^2 & \longrightarrow & E \\ (a, b) & \longmapsto & \varphi\left(\varphi^{-1}(a) + \varphi^{-1}(b)\right) \end{array} \right.$$

   munit E d'une structure de groupe qui possède les mêmes propriétés que l'addition réelle. Montrer que φ est un isomorphisme de groupes. Retrouver les résultats des deux questions précédentes.
8. *Montrer qu'un groupe est commutatif ssi l'inversion est un morphisme de ce groupe vers lui-même.*