

Courbes paramétrées

(T. G. 8)

1. (a) L'application γ est définie sur tout \mathbf{R} . Soit t un réel.

On a $\gamma(t + \pi) = \begin{pmatrix} -x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \text{ref}_{i\mathbf{R}}(\gamma(t))$, d'où l'on déduit : d'une part que $\gamma(t + 2\pi) = \text{ref}_{i\mathbf{R}}^2(\gamma(t)) = \text{Id}(\gamma(t)) = \gamma(t)$, ce qui montre que la trajectoire de γ vaut celle de $\gamma|_{[-\pi, \pi]}$, d'autre part que $\text{Im } \gamma|_{[-\pi, \pi]}$ est la réunion de $\text{Im } \gamma|_{[-\pi, 0]}$ avec sa symétrisée par rapport à $i\mathbf{R}$. Par ailleurs, on a $\gamma(-t) = \begin{pmatrix} -x(t) \\ -y(t) \end{pmatrix} = -\gamma(t)$, ce qui montre que $\text{Im } \gamma|_{[0, \pi]}$ est la réunion de $\text{Im } \gamma|_{[0, \frac{\pi}{2}]}$ et de son symétrisé par rapport à 0. On est finalement ramené à étudier γ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Le tableau de variation est immédiat vu les variations connues de sin et cos :

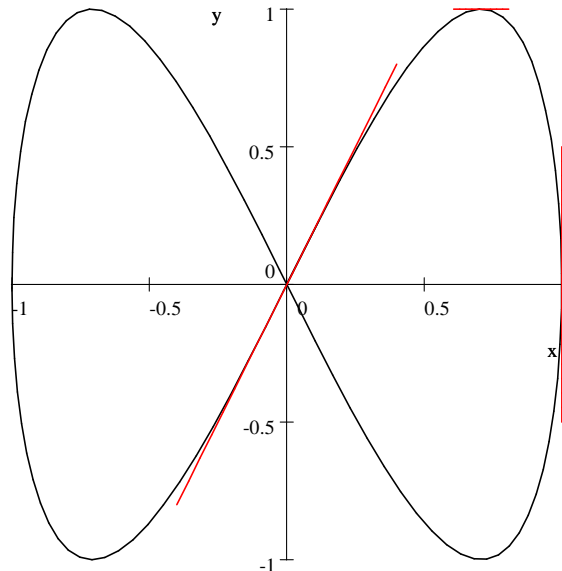
p	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$x(p)$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 0,7$	1
$y(p)$	0	1	0

Puisque $\gamma'(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ 2 \cos 2t \end{pmatrix}$, on a en particulier :

- $\gamma'(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, d'où une tangente de pente 2 en l'origine ;
- $\gamma'(\frac{\pi}{4}) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, d'où une tangente horizontale en $\frac{\pi}{4}$;
- $\gamma'(\frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, d'où une tangente verticale en $\frac{\pi}{2}$.

Il n'y a pas de branche infinie.

On en déduit la trajectoire :



- (b) L'application α est définie sur \mathbf{R} . Soit t un réel.

On a $\alpha(t + \frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} -Y(t) \\ X(t) \end{pmatrix} = \text{rot}_0^{\frac{\pi}{2}}(\alpha(t))$, ce qui permet de réduire l'étude de α sur $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$. Par ailleurs, on a $\alpha(-t) = \begin{pmatrix} X(t) \\ -Y(t) \end{pmatrix} = \text{ref}_{\mathbf{R}}(\alpha(t))$, donc on peut se restreindre à $[0, \frac{\pi}{4}]$.

Le tableau de variation est immédiat vu les variations connues de sin et cos :

p	0	$\frac{\pi}{4}$
$x(p)$	1	$\frac{1}{2\sqrt{2}} \simeq 0,4$
$y(p)$	0	$\frac{1}{2\sqrt{2}} \simeq 0,4$

Puisque $\alpha'(t) = \begin{pmatrix} -3(\sin t) \cos^2 t \\ 3(\cos t) \sin^2 t \end{pmatrix} = (3 \sin t \cos t) \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$, on a en particulier :

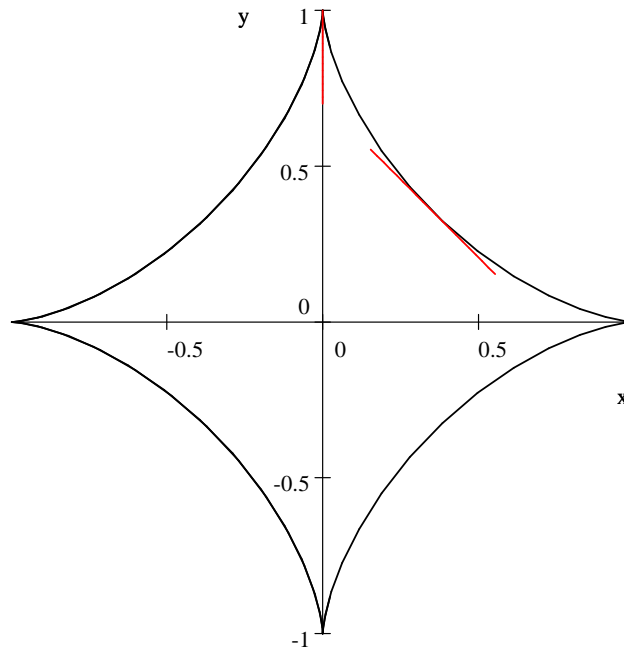
- $\alpha'(\frac{\pi}{4}) = \frac{3}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, d'où une tangente de pente -1 en $\frac{\pi}{4}$;
- $\alpha'(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, d'où un point stationnaire en 0. Regardons la limite en 0 du vecteur vitesse normalisé. La vitesse en t vaut

$$|\alpha'(t)| = \left| (3 \sin t \cos t) \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \right| = |3 \sin t \cos t|,$$

donc le vecteur vitesse normalisé en t vaut $\frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|} = (-\cos t, \sin t)$ qui tend vers $(-1, 0)$ lorsque $t \rightarrow 0$, d'où une tangente horizontale en 0.

Il n'y a pas de branche infinie.

On peut alors tracer le support de α :



- (c) On reconnaît, à un facteur $\frac{3}{2}$ près, le paramétrage rationnel du cercle unité privé de $(0, -1)$. Plus précisément, si r est réel, $c(r)$ est l'image du point $\left(\frac{2r}{1+r^2}, \frac{1-r^2}{1+r^2}\right)$ par l'affinité orthogonale d'axe $i\mathbf{R}$ et de rapport $\frac{3}{2}$, ou encore l'image du point $\frac{3}{2} \left(\frac{2r}{1+r^2}, \frac{1-r^2}{1+r^2}\right)$ par l'affinité d'axe \mathbf{R} et de rapport $\frac{2}{3}$. La trajectoire de c est donc l'image du cercle unité privé de $(0, -1)$ par l'affinité orthogonale d'axe $i\mathbf{R}$ et de rapport $\frac{3}{2}$, c'est-à-dire l'ellipse de centre 0, d'axe focal \mathbf{R} , de demi-grand axe $\frac{3}{2}$ et de demi-petit axe 1.
- (d) L'application φ est définie sur tout \mathbf{R} . Soit p un réel. Observer la "factorisation" $\varphi(p) = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \sin(p + \frac{\pi}{4}) \\ 3\sqrt{2} \cos(2p + \frac{\pi}{4}) \end{pmatrix}$.

On a $\varphi(p + \pi) = \begin{pmatrix} -f(p) \\ g(p) \end{pmatrix} = \text{ref}_{i\mathbf{R}}(\varphi(p))$, ce qui montre d'une part que φ est 2π -périodique (vu que $\text{ref}_{i\mathbf{R}}^2 = \text{Id}$), d'autre part que la trajectoire de φ vaut celle sur tout intervalle de longueur π union la symétrisée de cette dernière par rapport à $i\mathbf{R}$. On peut donc ramener l'étude de φ à un intervalle de longueur π , par exemple sur $[-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ où f croît strictement.

Sur cet intervalle, g est extrémale en $-\frac{5\pi}{8}$ et $-\frac{\pi}{8}$. On rappelle que¹ $\sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, d'où l'on tire

$$\begin{aligned} \sin \frac{3\pi}{8} &= 3 \sin \frac{\pi}{8} - 4 \sin^3 \frac{\pi}{8} \\ &= 3 \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} - 4 \frac{2-\sqrt{2}}{4} \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} (3 - (2-\sqrt{2})) \\ &= \sqrt{2-\sqrt{2}} \left(\frac{1+\sqrt{2}}{2} \right), \end{aligned}$$

d'où les valeurs

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{\pi}{8}\right) &= 2\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{8} = \sqrt{4-2\sqrt{2}} \simeq 1,1, \\ f\left(-\frac{3\pi}{8}\right) &= 2\sqrt{2} \sin\left(-\frac{\pi}{8}\right) = -\sqrt{4-2\sqrt{2}} \simeq -1,1, \\ f\left(-\frac{5\pi}{8}\right) &= 2\sqrt{2} \sin\left(-\frac{3\pi}{8}\right) = -\sqrt{2-\sqrt{2}}(\sqrt{2}+2) \simeq -2,6. \end{aligned}$$

On en déduit le tableau de variations :

t	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{5\pi}{8}$	$-\frac{3\pi}{8}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$					
$f(t)$	$-2\sqrt{2} \simeq -2,8$	\nearrow	$\simeq -3,7$	\nearrow	$\simeq -1,1$	\nearrow	0	\nearrow	$\simeq 1,1$	\nearrow	$2\sqrt{2} \simeq 2,8$
$g(t)$	-3	\searrow	$-3\sqrt{2} \simeq -4,2$	\nearrow	0	\nearrow	3	\nearrow	$3\sqrt{2} \simeq 4,2$	\searrow	-3

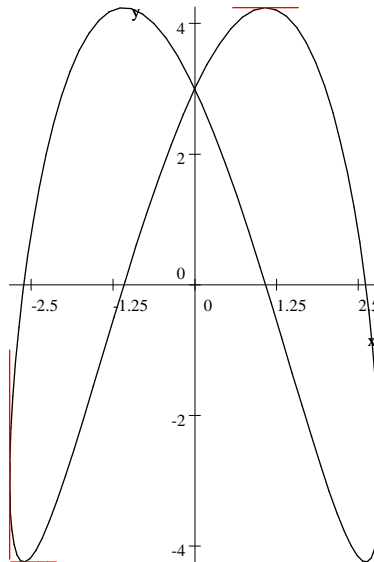
On a $\varphi'(p) = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 2 \cos(p+\frac{\pi}{4}) \\ -3 \sin(2p+\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix}$, d'où en particulier

- $\varphi'(-\frac{3\pi}{4}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\varphi'(\frac{\pi}{4}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, d'où deux tangentes verticales en $-\frac{3\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{4}$;
- $\varphi'(-\frac{5\pi}{8}) = \begin{pmatrix} \neq 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\varphi'(-\frac{\pi}{8}) = \begin{pmatrix} \neq 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, d'où deux tangentes horizontales en $-\frac{5\pi}{8}$ et $-\frac{\pi}{8}$.

Il n'y a pas de branche infinie.

¹en effet, $\sin \frac{\pi}{8}$ est la solution positive de l'équation $\cos(2\frac{\pi}{8}) = 1 - 2s^2$ d'inconnue s

On peut à présent tracer la courbe $\text{Im } \varphi$:



(e) L'application o est définie sur \mathbf{R} . Soit T un réel. Observer la factorisation $o(T) = \begin{pmatrix} T(T^2-3) \\ T^2(T^2-2) \end{pmatrix}$.

On a $o(-T) = \begin{pmatrix} -a(T) \\ b(T) \end{pmatrix} = \text{ref}_{i\mathbf{R}}(o(T))$, donc on peut ramener l'étude de o à \mathbf{R}_+ .

On a $o'(T) = \begin{pmatrix} a'(T) \\ b'(T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3T^2-3 \\ 4T^3-4T \end{pmatrix} = (T-1)(T+1) \begin{pmatrix} 3 \\ 4T \end{pmatrix}$, d'où le tableau de variations :

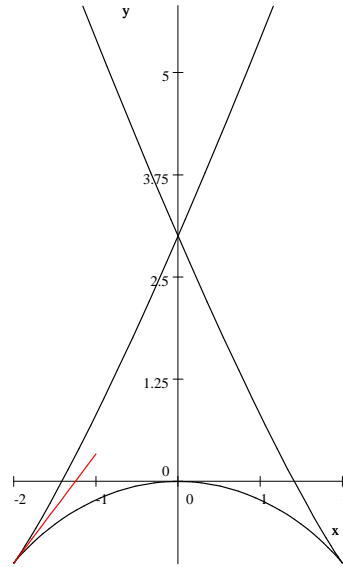
t	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	∞
$a(t)$	0	-2	$-\sqrt{2} \simeq 1,4$	0	∞
$b(t)$	0	-1	0	3	∞

- On $o'(0) = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$, d'où une tangente horizontale en 0 ;
- on $o'(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, d'où un point stationnaire en 1. On regarde la limite en 1 du vecteur vitesse normalisé. La vitesse en T vaut

$$|o'(T)| = |T^2 - 1| \sqrt{9 + 16T^2}, \text{ d'où } \frac{o'(T)}{|o'(T)|} = \frac{(3, 4T)}{\sqrt{9 + 16T^2}} \xrightarrow{T \rightarrow 1} \frac{(3, 4)}{5},$$

ce qui montre que $\text{Im } o$ admet une tangente de pente $\frac{4}{3}$ au point $o(1)$.

Ces informations permettent de tracer la trajectoire :



(f) L'application h est définie sur $\mathbf{R} \setminus \frac{\pi}{2}\mathbf{Z}$. Soit χ un réel non multiple de $\frac{\pi}{2}$. On a alors $h(\chi) = \frac{1+\cot \chi}{1+\tan \chi}$.

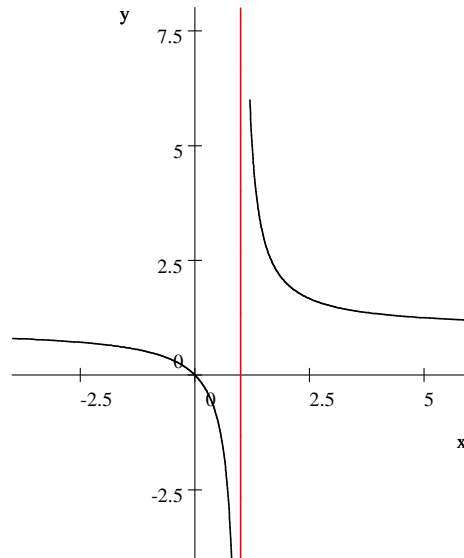
Le réel $\chi + \pi$ reste dans $\mathbf{R} \setminus \frac{\pi}{2}\mathbf{Z}$, donc $h(\chi + \pi)$ fait sens et vaut $h(\chi)$ par π -périodicité de \tan et \cot . On peut donc restreindre l'étude de h à un intervalle de longueur π . Par ailleurs, le réel $\frac{\pi}{2} - \chi$ reste dans $\mathbf{R} \setminus \frac{\pi}{2}\mathbf{Z}$, donc $h(\frac{\pi}{2} - \chi)$ fait sens et vaut $\frac{1+\tan \chi}{1+\cot \chi} = \text{ref}_{\Delta} h(\chi)$ où Δ désigne la première bissectrice, ce qui montre que l'on peut se ramener sur $[0, \frac{\pi}{4}]$.

Sur cet intervalle, $1 + \tan$ croît strictement et $1 + \cot$ décroît strictement, d'où le tableau de variation.

Puisque $\begin{cases} 1 + \cot \chi \xrightarrow{\chi \rightarrow 0^+} \infty \\ 1 + \tan \chi \xrightarrow{\chi \rightarrow 0^+} 1 \end{cases}$, la courbe h admet en 0^+ une asymptote verticale d'abscisse 1.

De plus, puisque $h'(\chi) = \left(-\frac{1}{\sin^2 \chi}, \frac{1}{\cos^2 \chi}\right)$, on en déduit $h'(\frac{\pi}{4}) = (-2, 2)$, donc h possède en $\frac{\pi}{4}$ une tangente de pente -1 .

On en déduit la trajectoire de h :



On dirait une hyperbole équilatère centrée en $(1, 1)$. Pour montrer cela, on remarque, en notant $\begin{pmatrix} X(\chi) \\ Y(\chi) \end{pmatrix}$ les coordonnées de $h(\chi)$ chacune diminuée de 1, que $X(\chi)Y(\chi) = \cot \chi \tan \chi = 1$, ce qui montre que la trajectoire $\text{Im } h$ est incluse dans l'hyperbole \mathcal{H} d'équation $(x-1)(y-1) = 1$; une étude attentive du tableau de variation montre par ailleurs que tous les points de \mathcal{H} sont atteints, ce qui conclut à l'égalité $\text{Im } h = \mathcal{H}$.

(g) L'application f est définie là où le dénominateur $1 + \text{Id}^3$ ne s'annule pas, *i. e.* sur $\mathbf{R} \setminus \{-1\}$. Soit $\delta \neq -1$ un réel.

Le réel $\frac{1}{\delta}$ reste dans $\mathbf{R} \setminus \{-1\}$, donc $f\left(\frac{1}{\delta}\right)$ fait sens et vaut (après multiplication des numérateurs et dénominateurs par δ^3) $\begin{pmatrix} v(\delta) \\ u(\delta) \end{pmatrix} = \text{ref}_\Delta(f(\delta))$ où Δ désigne la première bissectrice, donc on peut ramener l'étude de f à $] -1, 1]$.

On a

$$\begin{aligned} u'(\delta) &= \frac{3(1 + \delta^3) - 3\delta(3\delta^2)}{(1 + \delta^3)^2} = 3 \frac{1 - 2\delta^3}{(1 + \delta^3)^2} \text{ et} \\ v'(\delta) &= \frac{6\delta(1 + \delta^3) - 3\delta^2(3\delta^2)}{(1 + \delta^3)^2} = 3\delta \frac{2 - \delta^3}{(1 + \delta^3)^2}. \end{aligned}$$

Le point $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ est un maximum pour u et l'on a

$$\begin{aligned} u\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) &= \frac{3 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}}{1 + \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^3} = \frac{\frac{3}{\sqrt[3]{2}}}{\frac{3}{2}} = \sqrt[3]{2^2} \simeq 1,6 \text{ et} \\ v\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) &= \frac{3 \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^2}{1 + \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^3} = \frac{\frac{3}{\sqrt[3]{2^2}}}{\frac{3}{2}} = \sqrt[3]{2} \simeq 1,3. \end{aligned}$$

On en déduit le tableau de variations

t	-1	0	$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	1
$u(t)$	$-\infty$	$\nearrow 0$	$\nearrow \sqrt[3]{2^2} \simeq 1,6$	$\searrow 1,5$
$v(t)$	∞	$\searrow 0$	$\searrow \sqrt[3]{2} \simeq 1,3$	$\nearrow 1,5$

- Puisque $f'(0) = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, la courbe possède en 0 une tangente horizontale ;
- puisque $f'\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ \neq 0 \end{pmatrix}$, la courbe possède en $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ une tangente verticale ;
- puisque $f'(1) = \frac{3}{4}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, la courbe possède en 1 une tangente de pente -1 .

Puisque $|f(\delta)| \xrightarrow{\delta \rightarrow -1^+} \infty$, la courbe $\text{Im } f$ possède une branche infinie en -1^+ . Or $\frac{v(\delta)}{u(\delta)} = \delta \xrightarrow{\delta \rightarrow -1^+} -1$, donc la trajectoire possède en -1^+ une direction asymptotique : celle du vecteur $(1, -1)$. Enfin, puisque $v(\delta) - (-1)u(\delta) = \frac{3\delta^2 + 3\delta}{(1+\delta)(1-\delta+\delta^2)} = \frac{3\delta}{1-\delta+\delta^2} \xrightarrow{\delta \rightarrow -1^+} -1$, la droite d'équation $y = -x - 1$ est asymptote en -1^+ .

On peut alors tracer la trajectoire $\text{Im } f$:

