Coniques

(T. G. 7)

Solution proposée.

1. Pour chacune des équations suivantes, on raisonne par équivalences en complétant les carrés afin de se ramener à une forme réduite vue en cours.

   (a) On a les équivalences

$$\begin{aligned} & 3x^2+5y^2-6x+20y+8=0 \\ \iff & 3\left(x^2-2x+1^2\right)+5\left(y^2+4y+2^2\right)=3\cdot 1^2+5\cdot 2^2-8 \\ \iff & 3\left(x-1\right)^2+5\left(y+2\right)^2=15 \\ \iff & \frac{x'^2}{5}+\frac{y'^2}{3}=1 \text{ avec } \begin{cases} x':=x-1 \\ y':=y+2 \end{cases} \\ \iff & \left(\frac{x'}{a}\right)^2+\left(\frac{y'}{b}\right)^2=1 \text{ avec } \binom{a}{b}:=\binom{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

   On reconnaît l'ellipse centrée en $\binom{1}{-2}$, d'axe focal le nouvel axe des abscisses (d'équation $y=-2$), de demi-grand axe $\sqrt{5}\simeq 2,24$ et demi-petit axe $\sqrt{3}\simeq 1,73$. Son excentricité vaut $\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{3}{5}}=\sqrt{\frac{2}{5}}\simeq 0,63$.

   (b) On a les équivalences

$$\begin{aligned} & x^2-8y^2+14x+8y+37=0 \\ \iff & \left(x^2+14x+7^2\right)-8\left(y^2-y+\frac{1}{4}\right)=7^2-8\frac{1}{4}-37 \\ \iff & \left(x+7\right)^2-8\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=10 \\ \iff & \frac{x'^2}{10}-\frac{y'^2}{\frac{5}{4}}=1 \text{ avec } \begin{cases} x':=x+7 \\ y':=y-\frac{1}{2} \end{cases} \\ \iff & \left(\frac{x'}{a}\right)^2-\left(\frac{y'}{b}\right)^2=1 \text{ avec } \binom{a}{b}:=\binom{\sqrt{10}}{\frac{\sqrt{5}}{4}}. \end{aligned}$$

   On reconnaît l'hyperbole centrée en $\binom{-7}{\frac{1}{2}}$, d'axe focal le nouvel axe des abscisses (d'équation $y=\frac{1}{2}$), de demi-axe focal $\sqrt{10}\simeq 3,16$ et demi-axe non focal $\frac{\sqrt{5}}{2}\simeq 1,12$. Son excentricté vaut $e:=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{\frac{10}{8}}{10}}=\frac{3}{2\sqrt{2}}\simeq 1,06$ (très proche de 1), d'où le demi-angle entre ses asymptotes $\arccos\frac{1}{e}=\arccos\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\simeq 19,5°$.

   (c) On a les équivalences

$$\begin{aligned} & 9y^2-48y+64=0 \\ \iff & 9\left(y^2-\frac{16}{3}y+\left(\frac{8}{3}\right)^2\right)=9\left(\frac{8}{3}\right)^2-64 \\ \iff & \left(y-\frac{8}{3}\right)^2=0. \end{aligned}$$

   On reconnaît la droite horizontale d'ordonnée $\frac{8}{3}$.

(d) On a les équivalences

$$\begin{aligned}
& 9x^2+25y^2+24x-20y+52=0 \\
\iff\ & 9\left(x^2+\frac{8}{3}x+\left(\frac{4}{3}\right)^2\right)+25\left(y^2-\frac{4}{5}y+\left(\frac{2}{5}\right)^2\right)=9\left(\frac{4}{3}\right)^2+25\left(\frac{2}{5}\right)^2-52 \\
\iff\ & 9\left(x+\frac{4}{3}\right)^2+25\left(y-\frac{2}{5}\right)^2=-32.
\end{aligned}$$

Le membre de gauche étant une somme de carrés, il est positif; or le membre de droite ne l'est pas, ce qui montre que le lieu cherché est vide.

(e) On a les équivalences

$$\begin{aligned}
& y^2-4x^2+2y-12x+9=0 \\
\iff\ & \left(y^2+2y+1^2\right)-4\left(x^2+3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2\right)=1-4\left(\frac{3}{2}\right)^2-9 \\
\iff\ & (y+1)^2-4\left(x+\frac{3}{2}\right)^2=-19 \\
\iff\ & \frac{x'^2}{\frac{19}{4}}-\frac{y'^2}{19}=1 \text{ avec } \begin{cases} x':=x+\frac{3}{2} \\ y':=y+1 \end{cases} \\
\iff\ & \left(\frac{x'}{a}\right)^2-\left(\frac{y'}{b}\right)^2=1 \text{ avec } \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}:=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{19}}{2} \\ \sqrt{19} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

On reconnaît l'hyperbole centrée en $\binom{-\frac{3}{2}}{-1}$, d'axe focal le nouvel axe des abscisses (d'équation $y=-1$), de demi-axe focal $\frac{\sqrt{19}}{2}\simeq 2,18$ et demi-axe non focal $\sqrt{19}\simeq 4,36$. Son excentricité vaut $e:=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{19}{\frac{19}{4}}}=\sqrt{5}\simeq 2,2$, d'où le demi-angle entre les asymptotes arccos $\frac{1}{\sqrt{5}}\simeq 63,4°$.

(f) On a les équivalences

$$\begin{aligned}
& 3x+4y^2-28y+46=0 \\
\iff\ & 4\left(y^2-7y+\left(\frac{7}{2}\right)^2\right)=4\left(\frac{7}{2}\right)^2-46-3x \\
\iff\ & 4\left(y-\frac{7}{2}\right)^2=-3(x-1) \\
\iff\ & y'^2=-2px' \text{ avec } \begin{cases} x':=x-1 \\ y':=y-\frac{7}{2} \end{cases} \text{ et } p:=\frac{3}{8}.
\end{aligned}$$

On reconnaît la parabole de sommet $\binom{1}{\frac{7}{2}}$ et de paramètre $\frac{3}{8}=0,375$, qui est tournée vers les (nouvelles) abscisses négatives.

(g) On a les équivalences

$$\begin{aligned}
& 64x^2-9y^2-96x+42y-13=0 \\
\iff\ & 64\left(x^2-\frac{3}{2}x+\left(\frac{3}{4}\right)^2\right)-9\left(y^2-\frac{14}{3}y+\left(\frac{7}{3}\right)^2\right)=64\left(\frac{3}{4}\right)^2-9\left(\frac{7}{3}\right)^2+13 \\
\iff\ & 64\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-9\left(y-\frac{7}{3}\right)^2=0 \\
\iff\ & \left|y-\frac{7}{3}\right|=\frac{8}{3}\left|x-\frac{3}{4}\right|.
\end{aligned}$$

On reconnaît la réunion de deux droites de pentes $\pm\frac{8}{3}$ se coupant en $\left(\frac{3}{4},\frac{7}{3}\right)$.

(h) On a les équivalences

$$\begin{aligned}
& 5x^2+9y^2-20x+6y+18=0 \\
\iff\ & 5\left(x^2+4x+2^2\right)+9\left(y^2+\frac{2}{3}y+\left(\frac{1}{3}\right)^2\right)=5\cdot 2^2+9\left(\frac{1}{3}\right)^2-18 \\
\iff\ & 5\left(x+2\right)^2+9\left(y+\frac{1}{3}\right)^2=3 \\
\iff\ & \frac{x'^2}{\frac{3}{5}}+\frac{y'^2}{\frac{1}{3}}=1 \text{ avec } \begin{cases} x':=x+2 \\ y':=y+\frac{1}{3} \end{cases} \\
\iff\ & \left(\frac{x'}{a}\right)^2+\left(\frac{y'}{b}\right)^2=1 \text{ et } \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}:=\begin{pmatrix} \sqrt{\frac{3}{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

On reconnaît l'ellipse centrée en $\binom{-2}{-\frac{1}{3}}$, d'axe focal le nouvel axe des abscisses (d'équation $y=-\frac{1}{3}$), de demi-grand axe $\sqrt{\frac{3}{5}}\simeq 0,77$ et demi-petit axe $\sqrt{\frac{1}{3}}\simeq 0,58$. Son excentricité vaut $\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{5}{9}}=\frac{2}{3}\simeq 0,67$.

(i) On a les équivalences

$$\begin{aligned}
& x^2+6x-4y+11=0 \\
\iff\ & \left(x^2+6x+3^2\right)=3^2-11+4y \\
\iff\ & (x+3)^2=4\left(y-\frac{1}{2}\right) \\
\iff\ & x'^2=2py' \text{ avec } \begin{cases} x':=x+3 \\ y':=y-\frac{1}{2} \end{cases} \text{ et } p:=2.
\end{aligned}$$

On reconnaît la parabole de sommet $\binom{-3}{\frac{1}{2}}$ et de paramètre 2, qui est tournée vers les (nouvelles) ordonnées positives.

(a) Soient F, F' et a les deux foyers et demi-grand axe d'une ellipse $\mathcal{E}$ d'un plan π. On prend le même repère orthonormé qu'en cours. Soit P un point de π de coordonnées (x,y). On a les équivalences

$$\begin{aligned}
& FP+F'P=2a \\
\iff\ & F'P=2a-FP \\
\iff\ & \begin{cases} F'P^2=(2a-FP)^2 \\ FP\leq 2a \end{cases} \quad \text{car } F'P\geq 0 \\
\iff\ & \begin{cases} (x+ea)^2+y^2=4a^2-4aFP+(x-ea)^2+y^2 \\ FP\leq 2a \end{cases} \\
\iff\ & \begin{cases} x^2+2eax+a^2+y^2=4a^2-4aFP+x^2-2eax+a^2+y^2 \\ FP\leq 2a \end{cases} \\
\iff\ & \begin{cases} 4eax=4a^2-4aFP \\ 0\leq FP\leq 2a \end{cases} \quad \text{car } FP\geq 0 \\
\iff\ & \begin{cases} FP=a-ex \\ 0\leq FP\leq 2a \end{cases} \quad \text{car } a\neq 0 \\
\iff\ & \begin{cases} FP=|a-ex| \\ 0\leq a-ex\leq 2a \end{cases} \\
\iff\ & \begin{cases} FP=e\left|x-\frac{a}{e}\right| \\ -a\leq ex\leq a \end{cases} \\
\iff\ & \begin{cases} FP=e\ d\left(P,\Delta\right) \\ |ex|\leq a \end{cases} \quad \text{où } \Delta \text{ est la directrice associée au foyer} \\
\iff\ & \begin{cases} P\in\mathcal{E} \\ e\left|\frac{x}{a}\right|\leq 1 \end{cases}.
\end{aligned}$$

Or on a les implications

$$P\in\mathcal{E}\Longrightarrow\left(\frac{x}{a}\right)^2=1-\left(\frac{y}{b}\right)^2\Longrightarrow\left|\frac{x}{a}\right|\leq 1\Longrightarrow e\left|\frac{x}{a}\right|\leq e<1,$$

ce qui montre l'équivalence $\left\{\begin{array}{c} P\in\mathcal{E} \\ e\left|\frac{x}{a}\right|\leq 1\end{array}\right. \iff P\in\mathcal{E}$ et finit de répondre à la question.

(b) Soient F, F' et a les deux foyers et demi-axe focal d'une hyperbole $\mathcal{H}$ d'un plan π. On note $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ les branches de $\mathcal{H}$ associées respectivement aux foyers F et F'. On prend le même repère orthonormé qu'en cours. Soit P un point de π de coordonnées (x,y). On a les équivalences

$$\begin{aligned} P\in\mathcal{B} &\iff F'P-FP=2a \\ &\iff F'P=2a+FP \\ &\iff F'P^2=(2a+FP)^2 \qquad \text{car tout est positif} \\ &\iff (x+ea)^2+y^2=4a^2+4aFP+(x-ea)^2+y^2 \\ &\iff 4eax=4a^2+4aFP \\ &\iff FP=ex-a \qquad \text{car } a\neq 0 \\ &\iff \left\{\begin{array}{c} FP^2=(ex-a)^2 \\ ex-a\geq 0\end{array}\right. \qquad \text{car } FP\geq 0 \\ &\iff \left\{\begin{array}{c} (x-ea)^2+y^2=(ex-a)^2 \\ x\geq\frac{a}{e}\end{array}\right. \\ &\iff \left\{\begin{array}{c} \left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2=1 \\ x\geq\frac{a}{e}\end{array}\right. \qquad \text{d'après le cours (avec } b:=\sqrt{1+e^2}a). \end{aligned}$$

Observer que cette équation équivaut à $P\in\mathcal{H}$ et $x\geq x_\Delta$ où Δ est la directrice associée au foyer F.

Concernant la seconde branche $\mathcal{B}'$, il suffit de reprendre ce qui précède en échangeant F et F', ce qui mène aux équivalences

$$\begin{aligned} P\in\mathcal{B}' &\iff FP-F'P=2a \\ &\iff FP=-ex-a \\ &\iff \left\{\begin{array}{c} \left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2=1 \\ x\leq-\frac{a}{e}\end{array}\right. . \end{aligned}$$

(c) Soit dans un plan π une conique $\mathcal{C}$ de foyer F, directrice Δ et excentricité e (on suppose dans un premier temps que $\mathcal{C}$ n'est pas un cercle). On choisit un repère orthonormé d'axe des abscisses la perpendiculaire à Δ en F. (Observer au passage que l'origine vérifie l'équation cherchée et doit donc appartenir à $\mathcal{C}$.) On note f et δ les abscisses respectives de F et Δ (qui doivent vérifier $|f-\delta|=d(F,\Delta)$). Soit P un point de π de coordonnées (x,y). On a les équivalences

$$\begin{aligned} P\in\mathcal{C} &\iff FP=e\ d(\Delta,P) \\ &\iff FP^2=e^2\ d(\Delta,P)^2 \\ &\iff (x-f)^2+y^2=e^2(x-\delta)^2 \\ &\iff y^2=\left(e^2-1\right)x^2+2x\left(f-\delta e^2\right)+e^2\delta^2-f^2. \end{aligned}$$

On aura la forme voulue ssi l'on peut trouver un réel p tel que $\left\{\begin{array}{c} f-\delta e^2=p \\ e^2\delta^2-f^2=0\end{array}\right.$, autrement dit ssi le système $\left\{\begin{array}{c} f-\delta e^2=p \\ e^2\delta^2-f^2=0 \\ |f-\delta|=d(F,\Delta)\end{array}\right.$ d'inconnue $(f,\delta,p)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}_+$ admet une solution étant donné (e,F,Δ). La deuxième équation sera satisfaite (par exemple) pour $f=-e\delta$: sous cette condition, le système devient $\left\{\begin{array}{c} p=-\delta e(e+1) \\ f=-e\delta \\ |\delta|=\frac{d(F,\Delta)}{e+1}\end{array}\right.$ et sera vérifié (par exemple) si $\left\{\begin{array}{c} \delta=-\frac{d(F,\Delta)}{e+1} \\ f=\frac{e}{e+1}d(F,\Delta) \\ p=e\ d(F,\Delta)\end{array}\right.$.

Dans le cas d'un cercle (*i. e.* quand $e=0$), l'équation cherchée équivaut à $y^2=2px-x^2$, *i. e.* à $(x-p)^2+y^2=p^2$: il suffit donc de choisir un repère dans lequel le cercle $\mathcal{C}$ est de rayon p et centré en $\binom{p}{0}$, ce qui est possible en prenant pour p le rayon du cercle $\mathcal{C}$.

2. Les hypothèses permettent de paramétrer $\left\{\begin{array}{l} P:t\mapsto C(t)+R\binom{\cos t}{\sin t} \\ C:t\mapsto\binom{x_0+r\cos t}{y_0}\end{array}\right.$ pour certains réels x_0, y_0, $r>0$ et $R>0$. On en déduit pour tout réel t

$$P(t)=\begin{pmatrix} x_0+r\cos t \\ y_0\end{pmatrix}+R\begin{pmatrix}\cos t \\ \sin t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}(r+R)\cos t \\ R\sin t\end{pmatrix},$$

ce qui montre que P décrit une ellipse centrée en $\binom{x_0}{y_0}$ et de demi-axes R et $R+r$, d'où son excentricité

$$e := \sqrt{1-\left(\frac{R}{R+r}\right)^2} = \frac{\sqrt{r\,(2R+r)}}{R+r}.$$

(a) Géométriquement, fixer deux points sur la parabole équidistants du foyer (*i. e.* de la directrice) puis envoyer foyer et directrice "à l'infini" dans la même direction. En termes d'équations, on peut par exemple regarder ce que devient (lorsque le réel s tend vers $\pm\infty$) la parabole passant par les deux points $\binom{\pm 1}{0}$ et le sommet $\binom{0}{-s}$: une équation est $x^2 = \frac{y}{s}+1$, elle devient $x^2 = 1$, ce qui est bien l'équation de la réunion de deux droites parallèles.

Géométriquement, rapprocher ou éloigner indéfiniment foyer et directrice. En termes d'équations, lorsque le paramètre p tend vers 0, l'équation $y^2 = 2px$ devient $y^2 = 0$, ce qui est bien l'équation d'une droite (double) ; lorsque le paramètre p tend vers ∞, l'équation $x = \frac{y^2}{2p}$ devient $x = 0$, ce qui est bien l'équation d'une droite.

(b) Géométriquement, éloigner indéfiniment les foyers tout en gardant un petit axe fixe. En termes d'équations, garder b fixe et faire tendre a vers ∞ transforme l'équation $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ en $y^2 = b^2$, ce qui est bien l'équation de la réunion de deux droites parallèles.

Géométriquement, écraser le petit axe tout en gardant le même grand axe. Autre formulation : rétrécir au maximum le demi-grand axe tout en gardant les foyers à distance fixe. En termes d'équations, lorsque a tend vers la demi-distance focale, la caractérisation bifocale $FP + F'P = 2a$ devient $FP + F'P = FF'$, ce qui caractérise l'appartenance de P au segment $[FF']$.

(c) Géométriquement, écarter indéfiniment les asympotes, ce qui revient à agrandir indéfiniment l'axe non focal tout en gardant l'axe focal fixe. En termes d'équations, garder a fixe et faire tendre b vers ∞ transforme l'équation $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ en $x^2 = a^2$, ce qui est bien l'équation de la réunion de deux droites parallèles.

Géométriquement, rétrécir indéfiniment les demi-axes tout en conservant leur rapport (*i. e.* les asymptotes). En termes d'équations, fixer $\frac{b}{a}$ revient à fixer e ; lorsque a et b tendent vers 0, l'équation $\left(e^2-1\right)x^2 - y^2 = \left(e^2-1\right)a^2$ devient $\left(e^2-1\right)x^2 = y^2$, ce qui est bien l'équation de deux droites sécantes (de pentes $\pm\sqrt{e^2-1}$).

Géométriquement, rapprocher au maximum les asymptotes, ce qui revient à rétrécir indéfiniment l'axe non focal tout en gardant l'axe focal fixe. Autre formulation : rétrécir au maximum le demi-grand axe tout en gardant les foyers à distance fixe. En termes d'équations, lorsque a tend vers la demi-distance focale, la caractérisation bifocale $|FP - F'P| = 2a$ devient $\left\{\begin{array}{l} FP - F'P = FF' \\ \text{ou} \\ FP - F'P = -FF' \end{array}\right.$, *i. e.* $\left\{\begin{array}{l} FP = FF' + F'P \\ \text{ou} \\ PF + FF' = PF' \end{array}\right.$, *i. e.* $\left\{\begin{array}{l} F' \in [FP] \\ \text{ou} \\ F \in [PF'] \end{array}\right.$, ce qui caractérise l'appartenance de P à la droite (FF') privé de l'intervalle $]FF'[$.