Coniques

(T. G. 7)

1. **(étude systématique)** *Décrire les lieux géométriques donnés par chacune des équations cartésiennes suivantes en repère orthonormé (type de conique, paramètre ou demi-axes et excentricité si non dégénérée, tracé) :*

   (a) $3x^2 + 5y^2 - 6x + 20y + 8 = 0$;

   (b) $x^2 - 8y^2 + 14x + 8y + 37 = 0$;

   (c) $9y^2 - 48y + 64 = 0$;

   (d) $9x^2 + 25y^2 + 24x - 20y + 52 = 0$;

   (e) $y^2 - 4x^2 + 2y - 12x + 9 = 0$;

   (f) $3x + 4y^2 - 28y + 46 = 0$;

   (g) $64x^2 - 9y^2 - 96x + 42y - 13 = 0$;

   (h) $5x^2 + 9y^2 - 20x + 6y + 18 = 0$;

   (i) $x^2 + 6x - 4y + 11 = 0$;

2. **(autour des équations cartésiennes)**

   (a) *Retrouver l'équation cartésienne d'une ellipse à partir de la caractérisation bifocale.*

   (b) *Donner (avec preuve) une équation cartésienne pour chacune des branches d'une hyperbole.*

   (c) *Montrer qu'une conique donnée d'excentricité e admet une équation cartésienne de la forme $y^2 = 2px + \left(e^2 - 1\right) x^2$ pour un certain réel $p \geq 0$.*

3. **(une description dynamique d'une ellipse).** *Un point $P(t)$ tourne à vitesse angulaire et rayon constants autour d'un centre $C(t)$ oscillant sur une droite d'ordonnée constante de sorte que les abscisses de $P(t)$ et $C(t)$ soient maximales pour les mêmes t. Montrer que l'application $t \mapsto P(t)$ paramètre une ellipse dont on précisera l'excentricité.*

4. **(coniques dégénérées)**

   (a) *Montrer comment faire "dégénérer" une parabole pour obtenir (respectivement) la réunion de deux droites parallèles, une droite.*

   (b) *Montrer comment faire "dégénérer" une ellipse pour obtenir (respectivement) la réunion de deux droites parallèles, un segment.*

   (c) *Montrer comment faire "dégénérer" une hyperbole pour obtenir (respectivement) la réunion de deux droites parallèles, la réunion de deux droites sécantes, une droite privée d'un intervalle ouvert borné.*