Fonctions transcendantes

(T. G. 6)

Solution proposée.

1. (a) On commence par tout mettre sous forme exponentielle :

$$\begin{aligned}
2-2i &= 2(1-i)=2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}, \\
5\sqrt{3}-5i &= 10\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)=10e^{-\frac{\pi}{6}i}, \\
-e^{\frac{5\pi}{4}i} &= e^{\pi i}e^{-\frac{3\pi}{4}i}=e^{\frac{\pi}{4}i},
\end{aligned}$$

d'où les logarithmes principaux

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ln}(2-2i) &= \ln\left(2\sqrt{2}\right)-i\frac{\pi}{4}=\frac{3}{2}\ln 2-i\frac{\pi}{4}, \\
\operatorname{Ln}\left(5\sqrt{3}-5i\right) &= \ln 10-i\frac{\pi}{6}, \\
\operatorname{Ln}\left(-e^{\frac{5\pi}{4}i}\right) &= \frac{\pi}{4}i
\end{aligned}$$

(les arguments principaux se lisent comme les parties imaginaires).

(b) Soit $\sigma \in \mathbf{C}$. On a les équivalences

$$\begin{aligned}
e^{\frac{\sigma}{2}-\ln\sqrt{2}}=2-2i &\iff e^{\frac{\sigma-\ln 2}{2}}=e^{\frac{3}{2}\ln 2-i\frac{\pi}{4}} \\
&\iff \frac{\sigma-\ln 2}{2}=\frac{3}{2}\ln 2-i\frac{\pi}{4}\ \ [2\pi i] \\
&\iff \sigma=4\ln 2-i\frac{\pi}{2}\ \ [4\pi i],
\end{aligned}$$

on a les équivalences

$$\begin{aligned}
5\sqrt{3}-5i=e^{3\sigma+\ln 5} &\iff \sqrt{3}-i=e^{3\sigma} \\
&\iff e^{\ln 2-i\frac{\pi}{6}}=e^{3\sigma} \\
&\iff \ln 2-i\frac{\pi}{6}=3\sigma\ \ [2\pi i] \\
&\iff \sigma=\frac{\ln 2}{3}-i\frac{\pi}{18}\ \left[\frac{2\pi}{3}i\right],
\end{aligned}$$

on a les équivalences

$$\begin{aligned}
e^{\frac{5}{4}\pi i}=18e^{\sigma} &\iff e^{-\frac{3\pi}{4}i}=e^{\ln 18+\sigma} \\
&\iff -\frac{3\pi}{4}i=\ln 18+\sigma\ \ [2\pi i] \\
&\iff \sigma=-\ln 18-\frac{3\pi}{4}i\ \ [2\pi i].
\end{aligned}$$

(a) Les racines carrées de $-2=2e^{i\pi}$ sont $\pm\sqrt{2}e^{\frac{1}{2}i\pi}=\pm i\sqrt{2}$.
Les racines carrées de $169i=169e^{i\frac{\pi}{2}}$ sont $\pm\sqrt{169}e^{\frac{1}{2}i\frac{\pi}{2}}=\pm 13e^{i\frac{\pi}{4}}$.
Les racines carrées de $-1-i\sqrt{3}=2e^{-\frac{2\pi}{3}i}$ sont $\pm\sqrt{2}e^{\frac{1}{2}\left(-\frac{2\pi}{3}i\right)}=\pm\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{3}i}$.

(b) Une racine cubique de $-2-2i=2\sqrt{2}e^{-\frac{3\pi}{4}i}$ est $\sqrt[3]{2\sqrt{2}}e^{\frac{1}{3}\left(-\frac{3\pi}{4}i\right)}=\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$, les deux autres racines cubiques d'obtiennent en multipliant cette dernière par j et j^2, *i. e.* par $e^{\pm\frac{2\pi i}{3}}$. Les racines cubiques de $-2-2i$ sont donc

$$\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i},\ \sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{12}i}\ \text{et}\ \sqrt{2}e^{-\frac{11\pi}{12}i}.$$

Une racine cubique de 8 est $\sqrt[3]{8}=2$, les deux autres racines cubiques d'obtiennent en multipliant cette dernière par $e^{\pm\frac{2\pi i}{3}}$, d'où les trois racines cubiques de 8 :

$$2,\ 2e^{\frac{2\pi i}{3}} \text{ et } 2e^{-\frac{2\pi i}{3}}.$$

Une racine cubique de $2-2i=2\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$ est $\sqrt[3]{2\sqrt{2}}e^{\frac{1}{3}\left(-\frac{\pi}{4}i\right)}=\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{12}i}$, les deux autres racines cubiques d'obtiennent en ajoutant $\pm\frac{2\pi}{3}$ à l'argument de cette dernière, d'où les racines cubiques de $2-2i$:

$$\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{12}i},\ \sqrt{2}e^{\frac{7\pi}{12}i} \text{ et } \sqrt{2}e^{-\frac{3\pi}{4}i}.$$

On vérifiera dans les trois cas que les racines cubiques trouvées forment un triangle équilatéral centré en 0.

(c) Une racine quatrième de $-16=2^4e^{i\pi}$ est $\sqrt[4]{2^4}e^{\frac{1}{4}i\pi}=2\frac{1+i}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\,(1+i)$, les autres s'obtiennent à partir de celle-ci en multipliant par $e^{\frac{2i\pi}{4}}=i$, ce qui donne successivement $\sqrt{2}\,(i-1)$, $\sqrt{2}\,(-1-i)$ et $\sqrt{2}\,(1-i)$.

Une racine quatrième de $i-\sqrt{3}=2\left(\frac{i}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2e^{\frac{5\pi i}{6}}$ est $\sqrt[4]{2}e^{\frac{1}{4}\frac{5\pi i}{6}}=\sqrt[4]{2}e^{\frac{5\pi i}{24}}$, les autres s'obtennant en ajoutant à son argument des multiples entiers de $\frac{2\pi}{4}=\frac{12\pi}{24}$, ce qui donne les arguments $\frac{17\pi}{24}$, $\frac{29\pi}{24}=-\frac{19\pi}{24}$, $\frac{41\pi}{24}=-\frac{7\pi}{24}$.

Une racine quatrième de $64i=2^6e^{i\frac{\pi}{2}}$ est $\sqrt[4]{2^6}e^{\frac{1}{4}i\frac{\pi}{2}}=2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{8}}$, les autres s'obtennant en ajoutant à son argument des multiples entiers de $\frac{2\pi}{4}=\frac{4\pi}{8}$, ce qui donne les arguments $\frac{5\pi}{8}$, $\frac{9\pi}{8}=-\frac{7\pi}{8}$, $\frac{13\pi}{8}=-\frac{3\pi}{8}$.

On vérifiera dans les trois cas que les racines quatrièmes trouvées forment un carré centré en 0.

(d) $16i-16\sqrt{3}$, -25, $4+4i$.

Une racine cinquième de $16i-16\sqrt{3}=32\left(\frac{i}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2^5e^{\frac{5\pi i}{6}}$ est $\sqrt[5]{2^5}e^{\frac{1}{5}\frac{5\pi i}{6}}=2e^{i\frac{\pi}{6}}$, les autres s'obtenant en ajoutant à son argument des multiples entiers de $\frac{2\pi}{5}$, ce qui donne les arguments $\frac{17\pi}{30}$, $\frac{29\pi}{30}$, $\frac{41\pi}{30}=-\frac{19\pi}{30}$ et $\frac{53\pi}{30}=-\frac{7\pi}{30}$.

Une racine cinquième de $-25=5^2e^{i\pi}$ est $\sqrt[5]{5^2}e^{\frac{1}{5}i\pi}=5^{\frac{5}{2}}e^{\frac{i\pi}{5}}$, les autres s'obtenant en ajoutant à son argument des multiples entiers de $\frac{2\pi}{5}$, ce qui donne les arguments $\frac{3\pi}{5}$, π, $\frac{7\pi}{5}=-\frac{3\pi}{5}$ et $\frac{9\pi}{5}=-\frac{\pi}{5}$.

Une racine cinquième de $4+4i=4\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ est $\sqrt[5]{\sqrt{2}^4\sqrt{2}}e^{\frac{1}{5}\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{20}}$, les autres s'obtenant en ajoutant à son argument des multiples entiers de $\frac{2\pi}{5}=\frac{8\pi}{20}$, ce qui donne les arguments $\frac{9\pi}{20}$, $\frac{17\pi}{20}$, $\frac{25\pi}{20}=-\frac{3\pi}{4}$ et $\frac{33\pi}{20}=-\frac{7\pi}{20}$.

On vérifiera dans les trois cas que les racines cinquièmes trouvées forment un pentagone régulier centré en 0.

2. Soit g un réel.

(a) L'égalité $\ln\left(g^2-4\right)+\ln 9=\ln\left(4g+1\right)$ fait sens ssi les deux arguments de ln appartient à son ensemble $\mathbf{R}_+^*$ de définition, *i. e.* ssi $\begin{cases} g^2>4 \\ 4g+1>0 \end{cases}$, *i. e.* ssi $\begin{cases} g<-2 \text{ ou } g>2 \\ g>-\frac{1}{4} \end{cases}$, *i. e.* ssi $g<-2$ ou $g>-\frac{1}{4}$. Pour un tel g, on a alors les équivalences

$$\begin{aligned}
g \text{ est solution} &\iff \ln\left(g^2-4\right)+\ln 9=\ln\left(4g+1\right) \\
&\iff \ln\left(\left(g^2-4\right)\times 9\right)=\ln\left(4g+1\right) \\
&\underset{\text{bijective}}{\overset{\text{ln est}}{\iff}} \left(g^2-4\right)\times 9=4g+1 \\
&\iff 9g^2-4g-35=0 \\
&\iff \left(3g-\frac{2}{3}\right)^2=35+\frac{4}{9} \\
&\iff 3g-\frac{2}{3}=\pm\sqrt{\frac{315+4}{9}} \\
&\iff g=\frac{2\pm\sqrt{319}}{9}.
\end{aligned}$$

Vu les valeurs approchées $\frac{2+\sqrt{319}}{9} \simeq 2,2$ et $\frac{2-\sqrt{319}}{9} \simeq -1,8$, il faut exclure la valeur négative qui tombe dans $\left[-2,-\frac{1}{4}\right]$. En d'autres termes, l'ensemble des solutions est

$$\left\{\frac{2-\sqrt{319}}{9}, \frac{2-\sqrt{319}}{9}\right\} \Big\backslash \left[-2,-\frac{1}{4}\right] = \left\{\frac{2+\sqrt{319}}{9}\right\}.$$

(b) L'égalité $\ln|g-1| + \ln|g+2| = \ln\left|4g^2+3g-7\right|$ fait sens si les trois arguments de ln ne s'annulent pas, *i. e.* si $\begin{cases} g-1 \neq 0 \\ g+2 \neq 0 \\ 4g^2+3g-7 \neq 0 \end{cases}$, *i. e.* ssi $\begin{cases} g \neq 1 \text{ et } g \neq 2 \\ (4g+7)(g-1) \neq 0 \end{cases}$, *i. e.* ssi $\begin{cases} g \neq 1 \text{ et } g \neq 2 \\ g \neq -\frac{7}{4} \text{ et } g \neq 1 \end{cases}$, *i. e.* ssi $g \notin \left\{-\frac{7}{4}, 1, 2\right\}$. Pour un tel g, on a alors les équivalences

$$\begin{aligned}
g \text{ est solution} &\iff \ln|g-1| + \ln|g+2| = \ln\left|4g^2+3g-7\right| \\
&\iff \ln\left(|g-1|\,|g+2|\right) = \ln\left|(4g+7)(g-1)\right| \\
&\overset{\text{ln est}}{\underset{\text{bijective}}{\iff}} |g-1|\,|g+2| = |4g+7|\,|g-1| \\
&\iff |g+2| = |4g+7| \\
&\iff \begin{cases} 4g+7 = g+2 \\ \text{ou} \\ 4g+7 = -g-2 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} g = -\frac{5}{3} \\ \text{ou} \\ g = -\frac{9}{5} \end{cases} \\
&\iff g \in \left\{-\frac{9}{5}, -\frac{5}{3}\right\}.
\end{aligned}$$

On en déduit l'ensemble des solutions :

$$\left\{-\frac{9}{5}, -\frac{5}{3}\right\} \Big\backslash \left\{-\frac{7}{4}, 1, 2\right\} = \left\{-\frac{9}{5}, -\frac{5}{3}\right\}.$$

(c) L'égalité $18^{g^{18}} = 42^{g^{42}}$ fait sens ssi g^{18} et g^{42} font sens, *i. e.* ssi $g \geq 0$. Pour un tel g, on a alors les équivalences

$$\begin{aligned}
g \text{ est solution} &\iff 18^{g^{18}} = 42^{g^{42}} \overset{\text{ln est}}{\underset{\text{bijective}}{\iff}} g^{18}\ln 18 = g^{42}\ln 42 \\
&\iff \frac{\ln 18}{\ln 42} = g^{24} \overset{g\geq 0}{\iff} g = \sqrt[24]{\frac{\ln 18}{\ln 42}} = \sqrt[24]{\frac{\ln 2 + 2\ln 3}{\ln 2 + \ln 3 + \ln 7}}.
\end{aligned}$$

(d) L'égalité $g^{\sqrt[3]{g}} = \sqrt[3]{g}^{\,g}$ fait sens si les bases g et $\sqrt[3]{g}$ font sens et sont positives (et si les exposant $\sqrt[3]{g}$ et g font sens), *i. e.* ssi $g \geq 0$. Observer que l'égalité est vérifiée pour $g = 0$. Pour un $g > 0$, on a alors les équivalences

$$\begin{aligned}
g \text{ est solution} &\iff g^{\sqrt[3]{g}} = \sqrt[3]{g}^{\,g} \overset{\text{ln est}}{\underset{\text{bijective}}{\iff}} \sqrt[3]{g}\ln g = g\ln\sqrt[3]{g} \overset{g\neq 0}{\iff} \ln g = g^{\frac{2}{3}}\frac{\ln g}{3} \\
&\iff 3\ln g = g^{\frac{2}{3}}\ln g \text{ et } \begin{cases} g = 1 \\ \text{ou} \\ g \neq 1 \end{cases} \\
&\overset{\text{distributivité}}{\underset{\text{de } et \text{ sur } ou}{\iff}} \begin{cases} 3\ln g = g^{\frac{2}{3}}\ln g \\ g \neq 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 3\ln g = g^{\frac{2}{3}}\ln g \\ g = 1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 3 = g^{\frac{2}{3}} \\ g \neq 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 0 = 0 \\ g = 1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 3^{\frac{3}{2}} = g \\ g \neq 1 \end{cases} \text{ ou } g = 1 \\
&\iff g = 3\sqrt{3} \text{ ou } g = 1.
\end{aligned}$$

On en déduit l'ensemble des solutions :

$$\left\{0, 1, 3\sqrt{3}\right\}.$$

(e) On a les équivalences

$$\begin{aligned}
g \text{ est solution} &\iff 3^{g+1}+9^g=\frac{7}{4}\\
&\iff 3\cdot 3^g+\left(3^g\right)^2=\frac{7}{4}\\
&\iff 3^g \text{ est racine de } X^2+3X-\frac{7}{4}=\left(X+\frac{3}{2}\right)^2-4=\left(X-\frac{1}{2}\right)\left(X+\frac{7}{2}\right)\\
&\iff 3^g=\frac{1}{2} \text{ ou } \underbrace{\underbrace{3^g}_{>0}=\underbrace{-\frac{7}{2}}_{<0}}_{\text{impossible}}\\
&\underset{\text{bijective}}{\overset{\ln \text{ est}}{\iff}} g\ln 3=-\ln 2\\
&\iff g=-\frac{\ln 2}{\ln 3}.
\end{aligned}$$

(f) On a les équivalences

$$\begin{aligned}
g \text{ est solution} &\iff 4^g-3^{g-\frac{1}{2}}=3^{g+\frac{1}{2}}-2^{2g-1}\\
&\iff 2^{2g}+2^{2g-1}=3^{g+\frac{1}{2}}+3^{g-\frac{1}{2}}\\
&\iff 2^{2g-1}(2+1)=3^{g-\frac{1}{2}}(3+1)\\
&\iff 3\cdot 2^{2g-1}=4\cdot 3^{g-\frac{1}{2}}\\
&\iff 2^{2g-3}=3^{g-\frac{3}{2}}\\
&\underset{\text{bijective}}{\overset{\ln \text{ est}}{\iff}} (2g-3)\ln 2=\left(g-\frac{3}{2}\right)\ln 3\\
&\iff g=\frac{3\ln 2-\frac{3}{2}\ln 3}{2\ln 2+\ln 3}.
\end{aligned}$$

(g) L'égalité $\lg_{42} g=\lg_g 42$ fait sens ssi la base g est dans $\mathbf{R}_+^*\setminus\{1\}$ et si l'argument g appartient à l'ensemble de définition de ln, *i. e.* ssi $\left\{\begin{array}{c} g>0\\ g\neq 1\end{array}\right.$. Pour un tel g, on a les équivalences

$$\begin{aligned}
g \text{ est solution} &\iff \lg_{42} g=\lg_g 42 \iff \frac{\ln g}{\ln 42}=\frac{\ln 42}{\ln g}\iff (\ln g)^2=(\ln 42)^{42}\iff \ln g=\pm\ln 42\\
&\iff \ln g=\ln 42 \text{ ou } \ln g=\ln\frac{1}{42}\\
&\underset{\text{bijective}}{\overset{\ln \text{ est}}{\iff}} g=42 \text{ ou } g=\frac{1}{42}.
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc $\left\{\frac{1}{42},42\right\}\cap\mathbf{R}_+^*\setminus\{1\}=\left\{\frac{1}{42},42\right\}$.

(h) La fonction $\sqrt[18]{\cdot}+\sqrt[42]{\cdot}$ croît strictement comme somme d'applications strictement croissantes, donc est injective, ce qui montre qu'il n'y a au plus qu'une solution à l'équation demandée. Puisque 1 est manifestement solution (on a bien $\sqrt[18]{1}+\sqrt[42]{1}=1+1=2$), c'est la seule.

3. Soient φ et k deux réels.

(a) On a les équivalences

$$\left\{\begin{array}{c} 8^\varphi=10k\\ 2^\varphi=5k\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{c} \left(2^3\right)^\varphi=2\cdot 5k\\ 2^\varphi=5k\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{c} 2^{3\varphi}=2\cdot 2^\varphi\\ 2^\varphi=5k\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{c} 2^{3\varphi}=2^{\varphi+1}\\ k=\frac{2^\varphi}{5}\end{array}\right.$$

$$\underset{\text{bijective}}{\overset{\lg_2 \text{ est}}{\iff}}\left\{\begin{array}{c} 3\varphi=\varphi+1\\ k=\frac{2^\varphi}{5}\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{c} \varphi=\frac{1}{2}\\ k=\frac{2^\varphi}{5}\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{c} \varphi=\frac{1}{2}\\ k=\frac{\sqrt{2}}{5}\end{array}\right..$$

(b) On a les équivalences

$$\left\{\begin{array}{c}\varphi+k=9\\ \lg_{18}\varphi+\lg_{18}k=1\end{array}\right. \underset{\text{bijective}}{\overset{18^{\mathrm{Id}}\text{ est}}{\Longleftrightarrow}} \left\{\begin{array}{c}\varphi+k=9\\ 18^{\lg_{18}\varphi+\lg_{18}k}=18^1\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c}\varphi+k=9\\ 18^{\lg_{18}\varphi}\times 18^{\lg_{18}k}=18\end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c}\varphi+k=9\\ \varphi\times k=18\end{array}\right. \Longleftrightarrow \varphi \text{ et } k \text{ sont les racines de } X^2-9X+18=(X-3)(X-2)$$

$$\Longleftrightarrow \{\varphi,k\}=\{2,3\} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix}\varphi\\ k\end{pmatrix}\in\left\{\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}\right\}.$$

(c) On a les équivalences

$$\left\{\begin{array}{c}\varphi^2+k^2=13\\ 2\lg_{42}\varphi+2\lg_{42}k=1\end{array}\right. \underset{\text{bijective}}{\overset{45^{\mathrm{Id}}\text{ est}}{\Longleftrightarrow}} \left\{\begin{array}{c}\varphi^2+k^2=13\\ 42^{2\lg_{42}\varphi+2\lg_{42}k}=42^1\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c}\varphi^2+k^2=13\\ 42^{2\lg_{42}\varphi}\times 42^{2\lg_{42}k}=42\end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c}\varphi^2+k^2=13\\ \varphi^2\times k^2=42\end{array}\right. \Longleftrightarrow \varphi^2 \text{ et } k^2 \text{ sont les racines de } X^2-13X+42=(X-6)(X-7)$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\varphi^2,k^2\right\}=\{6,7\}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix}\varphi\\ k\end{pmatrix}\in\left\{\begin{pmatrix}\sqrt6\\ \sqrt7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\sqrt6\\ \sqrt7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\sqrt6\\ -\sqrt7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\sqrt6\\ -\sqrt7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\sqrt7\\ \sqrt6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\sqrt7\\ \sqrt6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\sqrt7\\ -\sqrt6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\sqrt7\\ -\sqrt6\end{pmatrix}\right\}.$$

(a) Soit $a\geq 0$.
On observera au passage la simplification

$$\frac{1-a}{1+a}=\frac{2-(1+a)}{1+a}=\frac{2}{1+a}-1.$$

Le réel $\arctan\sqrt{a}$ fait sens ssi l'argument $\sqrt{a}$ fait sens et appartient à l'ensemble $\mathbf{R}$ de définition de arctan, *i. e.* ssi $a\geq 0$, ce qui est vrai. De même, le réel $\frac{d}{da}\arctan\sqrt{a}$ fait sens ssi $a>0$.

Le réel $\arccos\frac{1-a}{1+a}$ fait sens ssi l'argument $\frac{1-a}{1+a}$ fait sens et appartient à l'ensemble $[-1,1]$ de définition de arccos, *i. e.* ssi $a\neq -1$ et si $\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^2\leq 1$, *i. e.* ssi $(1-a)^2\leq(1+a)^2$, *i. e.* ssi $1-2a+a^2\leq 1+2a+a^2$, *i. e.* $0\leq 4a$, ce qui est vrai. De même, le réel $\frac{d}{da}\left(\arccos\frac{1-a}{1+a}\right)$ fait sens ssi $\frac{1-a}{1+a}$ appartient à l'ensemble $]-1,1[$ de dérivation de arccos, *i. e.* (en suivant le même calcul que ci-dessus) ssi $a>0$.

Ces vérifications étant effectuées, on peut se lancer dans le calcul des dérivées en supposant de plus $a\neq 0$:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\arccos\frac{1-a}{1+a}\right) &= \left(\arccos'\left(\frac{1-a}{1+a}\right)\right)\times\frac{d}{da}\left(\frac{2}{1+a}-1\right)\\ &= \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^2}}\frac{-2}{(1+a)^2}\\ &= \frac{2}{\sqrt{(1+a)^2-(1-a)^2}}\frac{1}{|1+a|}\\ &= \frac{1}{\sqrt{a}}\frac{1}{1+a}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{d}{da}\left(\arctan\sqrt{a}\right) &= \arctan'\left(\sqrt{a}\right)\times\frac{d}{da}\sqrt{a}\\ &= \frac{1}{1+\sqrt{a}^2}\times\frac{1}{2\sqrt{a}}\\ &= \frac{1}{1+a}\frac{1}{2\sqrt{a}}.\end{aligned}$$

Ceci tenant pour tout $a>0$, on en déduit que la fonction $\arccos\frac{1-\mathrm{Id}}{1+\mathrm{Id}}-2\arctan\sqrt{\mathrm{Id}}$ est de dérivée nulle sur l'intervalle $\mathbf{R}_+^*$, donc y est constante. Elle y vaut par conséquent sa valeur en 1, à savoir

$$\arccos\frac{1-1}{1+1}-2\arctan\sqrt{1}=\arccos 0-2\arctan 1=\frac{\pi}{2}-2\frac{\pi}{4}=0,$$

ce qui permet de conclure après vérification de l'identité voulue en 0 :

$$\arccos\frac{1-0}{1+0}\stackrel{?}{=}\arctan\sqrt{0}\Longleftrightarrow\arccos 1\stackrel{?}{=}\arctan 0\Longleftrightarrow 0\stackrel{?}{=}0,\text{ ce qui est vrai.}$$

Soit $t\geq 0$. Pour montrer d'une autre façon l'égalité $\arccos\frac{1-t}{1+t}=2\arctan\sqrt{t}$, posons $\theta:=\arctan\sqrt{t}$ (qui appartient à $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$) (d'où l'on tire $t=\tan^2\theta$) et calculons

$$\begin{aligned}
\arccos\frac{1-t}{1+t} &= \arccos\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}\\
&= \arccos\frac{1-\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}{1+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}\\
&= \arccos\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}\\
&= \arccos\cos 2\theta\\
&= 2\theta \qquad \text{car } 2\theta\in[0,\pi]\\
&= 2\arctan\sqrt{t},\ \textit{c. q. f. d.}.
\end{aligned}$$

(b) Soit $a\in\mathbf{R}$.

Le réel $\operatorname{argch}\sqrt{\frac{\operatorname{ch}a+1}{2}}$ fait sens ssi l'argument $\sqrt{\frac{\operatorname{ch}a+1}{2}}$ fait sens et appartient à l'ensemble $[1,\infty[$ de définition de argch, *i. e.* ssi $\frac{\operatorname{ch}a+1}{2}\geq 0$ et si $\sqrt{\frac{\operatorname{ch}a+1}{2}}\geq 1$, ce qui est vrai puisque $\frac{\operatorname{ch}a+1}{2}\geq\frac{1+1}{2}=1$. De même, le réel $\frac{d}{da}\left(\operatorname{argch}\sqrt{\frac{\operatorname{ch}a+1}{2}}\right)$ fait sens ssi $\sqrt{\frac{\operatorname{ch}a+1}{2}}>1$, *i. e.* (d'après ce qui précède) ssi $a\neq 0$.

En supposant $a\neq 0$, on a alors

$$\begin{aligned}
\frac{d}{da}\left(\operatorname{argch}\sqrt{\frac{\operatorname{ch}a+1}{2}}\right) &= \operatorname{argch}'\left(\sqrt{\frac{\operatorname{ch}a+1}{2}}\right)\times\frac{d}{da}\sqrt{\frac{\operatorname{ch}a+1}{2}}\\
&= \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\frac{\operatorname{ch}a+1}{2}}^2-1}}\times\frac{1}{2\sqrt{\frac{\operatorname{ch}a+1}{2}}}\times\frac{d}{da}\left(\frac{\operatorname{ch}a+1}{2}\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{\frac{\operatorname{ch}a+1}{2}-1}}\frac{1}{2\sqrt{\frac{\operatorname{ch}a+1}{2}}}\frac{\operatorname{sh}a}{2}\\
&= \frac{1}{\sqrt{\frac{\operatorname{ch}a-1}{2}}}\frac{1}{\sqrt{\frac{\operatorname{ch}a+1}{2}}}\frac{\operatorname{sh}a}{4}\\
&= \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}^2a-1}}\frac{\operatorname{sh}a}{2}\\
&= \frac{1}{|\operatorname{sh}a|}\frac{\operatorname{sh}a}{2}\\
&= \frac{1}{2}\operatorname{signe}(\operatorname{sh}a)\\
&= \frac{1}{2}\operatorname{signe}(a) \qquad \text{car sh est impaire}\\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{da}|a|.
\end{aligned}$$

Il en résulte que la fonction $\operatorname{argch}\sqrt{\frac{\operatorname{ch}+1}{2}}-?\,|\mathrm{Id}|$ est de dérivée nulle sur chacun des intervalles $\mathbf{R}_+^*$ et $\mathbf{R}_-^*$, donc est constante sur chacun de ces intervalles ; puisqu'elle est par ailleurs continue, elle vaut sur $\mathbf{R}_+^*$ sa limite en 0^+ et elle vaut sur $\mathbf{R}_-^*$ sa limite en 0^-, donc vaut sur tout $\mathbf{R}$ sa valeur en 0, à savoir

$$\operatorname{argch}\sqrt{\frac{\operatorname{ch}0+1}{2}}-?\,|0|=\operatorname{argch}1=0,\ \textit{c. q. f. d.}.$$

On pouvait utiliser directement la formule de duplication du ch :

$$\begin{aligned}
\operatorname{argch}\sqrt{\frac{\operatorname{ch} a+1}{2}} &= \operatorname{argch}\sqrt{\operatorname{ch}^2 2a} \\
&= \operatorname{argch}|\operatorname{ch} 2a| \\
&= \operatorname{argch}\operatorname{ch} 2a \qquad \text{car } \operatorname{ch} \geq 1 \\
&= \operatorname{argch}\operatorname{ch}|2a| \qquad \text{car } \operatorname{ch} \text{ est paire} \\
&= |2a| \qquad \text{car } 2a \geq 0.
\end{aligned}$$

(c) Soit $t \in \mathbf{R}$.

Le réel $\arcsin\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ fait sens ssi l'argument $\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ fait sens et appartient à l'ensemble $[-1,1]$ de définition de arcsin, *i. e.* ssi $\begin{cases} 1+t^2>0 \\ \left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2 \leq 1 \end{cases}$, *i. e.* ssi $t^2 \leq 1+t^2$, *i. e.* ssi $0 \leq 1$, ce qui est vrai. De même, le réel $\frac{d}{dt}\left(\arcsin\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)$ fait sens ssi $\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ appartient à l'ensemble $]-1,1[$ de dérivabilité de arcsin, *i. e.* (d'après le calcul ci-dessus) ssi $0<1$, ce qui est vrai.

On peut par conséquent calculer

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\arcsin\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right) &= \arcsin'\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right) \times \frac{d}{dt}\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2}} \times \frac{1\times\sqrt{1+t^2}-t\times\frac{2t}{2\sqrt{1+t^2}}}{\sqrt{1+t^2}^2} \\
&= \sqrt{\frac{1+t^2}{(1+t^2)-t^2}} \times \frac{(1+t^2)-t^2}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}} \\
&= \frac{1}{1+t^2} \\
&= \frac{d}{dt}\arctan t.
\end{aligned}$$

La fonction $\arcsin\frac{\mathrm{Id}}{\sqrt{1+\mathrm{Id}^2}}-\arctan$ est par conséquent de dérivée nulle sur l'intervalle $\mathbf{R}$, donc y vaut constamment sa valeur en 0, à savoir

$$\arcsin\frac{0}{\sqrt{1+0^2}}-\arctan 0 = 0-0 = 0, \ c.\ q.\ f.\ d..$$

On aurait pu également poser $\theta := \arctan t$ (qui tombe dans $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$) (d'où l'on tire $t=\tan\theta$) et calculer

$$\begin{aligned}
\arcsin\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} &= \arcsin\frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} \\
&= \arcsin\frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2\theta}}} \\
&= \arcsin\left(\sin\theta\times\frac{|\cos\theta|}{\cos\theta}\right) \\
&= \arcsin(\sin\theta) \qquad \text{car } |\theta| \leq \frac{\pi}{2} \\
&= \theta \qquad \text{car } |\theta| \leq \frac{\pi}{2} \\
&= \arctan t.
\end{aligned}$$

(d) Soit $c \in]-1,1]$.

On observera au passage que

$$\frac{1-c}{1+c} = \frac{2-(1+c)}{1+c} = \frac{2}{1+c}-1.$$

Le réel $\arctan\sqrt{\frac{1-c}{1+c}}$ fait sens ssi l'argument $\sqrt{\frac{1-c}{1+c}}$ fait sens et appartient à l'ensemble $\mathbf{R}$ de définition de arctan, *i. e.* ssi $\left\{\begin{array}{l}1+c\neq 0\\ \frac{1-c}{1+c}\geq 0\end{array}\right.$, *i. e.* (puisque $c+1>0$) ssi $1-c\geq 0$, *i. e.* ssi $c\leq 1$, ce qui est vrai.

De même, le réel $\frac{d}{dt}\left(\arctan\sqrt{\frac{1-c}{1+c}}\right)$ fait sens ssi l'argument $\sqrt{\frac{1-c}{1+c}}$ fait sens et appartient à l'ensemble $\mathbf{R}$ de dérivabilité de arctan et si l'argument $\frac{1-c}{1+c}$ fait sens et appartient à l'ensemble $\mathbf{R}_+^*$ de dérivabilité de $\sqrt{\cdot}$, ce qui équivaut à $c\in\left]-1,1\right[$.

En supposant de plus $c\neq 1$, on peut alors calculer

$$\begin{aligned}\frac{d}{dc}\left(\arctan\sqrt{\frac{1-c}{1+c}}\right) &= \arctan'\left(\sqrt{\frac{1-c}{1+c}}\right)\times\frac{d}{dt}\sqrt{\frac{1-c}{1+c}}\\ &= \frac{1}{1+\sqrt{\frac{1-c}{1+c}}^2}\times\frac{1}{2\sqrt{\frac{1-c}{1+c}}}\times\frac{d}{dt}\left(\frac{2}{1+c}-1\right)\\ &= \frac{1+c}{(1+c)+(1-c)}\times\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+c}{1-c}}\times\frac{-2}{(1+c)^2}\\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+c}{1-c}}\frac{-1}{1+c}\\ &= -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{(1-c)(1+c)}}\\ &= -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-c^2}}\\ &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\arccos t\right).\end{aligned}$$

Il en résulte que la fonction $\arctan\sqrt{\frac{1-\mathrm{Id}}{1+\mathrm{Id}}}-\frac{1}{2}\arccos$ est de dérivée nulle sur $\left]-1,1\right[$, donc y vaut constamment sa valeur en 0, à savoir

$$\arctan\sqrt{\frac{1-0}{1+0}}-\frac{1}{2}\arccos 0=\underbrace{\arctan 1}_{=\frac{\pi}{4}}-\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}=0,\ c.\ q.\ f.\ d..$$

On aurait également pu poser $\theta:=\arccos c$ (qui tombe dans $[0,\pi]$) (d'où l'on tire $c=\cos\theta$) et calculer

$$\begin{aligned}\arctan\sqrt{\frac{1-c}{1+c}} &= \arctan\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}\\ &= \arctan\sqrt{\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}}\\ &= \arctan\sqrt{\tan^2\frac{\theta}{2}}\\ &= \arctan\tan\frac{\theta}{2}\qquad\text{car }\frac{\theta}{2}\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\\ &= \frac{\theta}{2}\qquad\text{car }\frac{\theta}{2}\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\\ &= \frac{\arccos c}{2}.\end{aligned}$$

(e) Soit $m>0$.

Le réel $\operatorname{argch}\frac{m+\frac{1}{m}}{2}$ fait sens ssi l'argument $\frac{m+\frac{1}{m}}{2}$ appartient à l'ensemble $[1,\infty[$ de définition de argch, ce qui est vrai en vertu de la comparaison $m+\frac{1}{m}\geq 2$. De même, le réel $\frac{d}{dm}\left(\operatorname{argch}\frac{m+\frac{1}{m}}{2}\right)$ fait sens ssi l'argument $\frac{m+\frac{1}{m}}{2}$ appartient à l'ensemble $]1,\infty[$ de dérivabilité de argch, *i. e.* (vu le cas d'égalité de la comparaison précédente) ssi $m\neq 1$.

En supposons $m \neq 1$, on peut alors écrire

$$\frac{d}{dm}\left(\operatorname{argch}\frac{m+\frac{1}{m}}{2}\right) = \operatorname{argch}'\left(\frac{m+\frac{1}{m}}{2}\right) \times \frac{d}{dm}\left(\frac{m+\frac{1}{m}}{2}\right)$$

Il est raisonnable d'évaluer à part

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\operatorname{argch}'\left(\frac{m+\frac{1}{m}}{2}\right) &= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{m+\frac{1}{m}}{2}\right)^2-1}} \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\frac{m^2+2+\frac{1}{m^2}-4}{4}}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{m^2-2+\frac{1}{m^2}}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\left(m-\frac{1}{m}\right)^2}} \\
&= \frac{1}{\left|m-\frac{1}{m}\right|} \\
&= \frac{m}{|m^2-1|} \qquad \text{car } m>0.
\end{aligned}$$

On a ainsi

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dm}\left(\operatorname{argch}\frac{m+\frac{1}{m}}{2}\right) &= \frac{1}{2}\operatorname{argch}'\left(\frac{m+\frac{1}{m}}{2}\right) \times \frac{d}{dm}\left(m+\frac{1}{m}\right) \\
&= \frac{m}{|m^2-1|}\left(1-\frac{1}{m^2}\right) \\
&= \frac{m}{|m^2-1|}\frac{m^2-1}{m^2} \\
&= \operatorname{signe}\left(m^2-1\right) \times \frac{1}{m} \\
&= \operatorname{signe}(\ln m) \times \frac{d}{dm}(\ln m) \\
&= \frac{d}{dm}|\ln m|.
\end{aligned}$$

Par conséquent, la fonction $\operatorname{argch}\frac{\mathrm{Id}+\frac{1}{\mathrm{Id}}}{2} - \ln|\cdot|$ est de dérivée nulle sur chacun des intervalles $]0,1[$ et $]1,\infty[$, donc est constante sur chacun de ces intervalles ; comme cette fonction est par ailleurs continue sur $\mathbf{R}_+^*$, elle vaut sur $]0,1[$ sa limite en 1^- et elle vaut sur $]1,\infty[$ sa limite en 1^+. Finalement, cette fonction vaut constammant sa valeur en 1, à savoir

$$\operatorname{argch}\frac{1+\frac{1}{1}}{2} - \ln|1| = \operatorname{argch}1 - \ln 1 = 0 - 0 = 0, \textit{ c. q. f. d.}.$$

On aurait également pu poser $l := \ln m$ (d'où l'on tire $m = e^l$) et calculer

$$\begin{aligned}
\operatorname{argch}\frac{m+\frac{1}{m}}{2} &= \operatorname{argch}\frac{e^l+e^{-l}}{2} \\
&= \operatorname{argch}\operatorname{ch} l \\
&= \operatorname{argch}\operatorname{ch}|l| \qquad \text{car ch est paire} \\
&= |l| \qquad \text{car } |l| \geq 0 \\
&= |\ln m|.
\end{aligned}$$

(f) Soit $t \in]-1,1[$. Le réel $\operatorname{argth}\frac{3t+t^3}{1+3t^2}$ fait sens ssi l'argument $\frac{3t+t^3}{1+3t^2}$ fait sens et appartient à l'ensemble $]-1,1[$ de définition de argth, *i. e.* ssi le dénominateur $1+3t^2$ est non nul et si $-1 <$

$\frac{3t+t^3}{1+3t^2} < 1$, ce qui équivaut à $-1-3t^2 < 3t+t^3 < 1+3t^2$, ou encore à $\left\{ \begin{array}{l} t^3-3t^2+3t-1<0 \\ t^3+3t^2+3t+1>0 \end{array} \right.$, *i. e.* à $\left\{ \begin{array}{l} (t-1)^3<0 \\ (t+1)^3>0 \end{array} \right.$, ou encore (par stricte croissance de Id^3) à $\left\{ \begin{array}{l} t-1<0 \\ t+1>0 \end{array} \right.$, ce qui est vrai.

Regardons alors la dérivée :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\left(\operatorname{argth}\frac{3t+t^3}{1+3t^2}\right) &= \operatorname{argth}'\left(\frac{3t+t^3}{1+3t^2}\right)\times\frac{\partial}{\partial t}\frac{3t+t^3}{1+3t^2} \\
&= \frac{1}{1-\left(\frac{3t+t^3}{1+3t^2}\right)^2}\times\frac{\left(3+3t^2\right)\left(1+3t^2\right)-\left(3t+t^3\right)6t}{\left(1+3t^2\right)^2} \\
&= 3\frac{\left(1+t^2\right)\left(1+3t^2\right)-2t^2\left(t^2+3\right)}{\left(1+3t^2\right)^2-t^2\left(3+t^2\right)^2} \\
&= 3\frac{1+4t^2+3t^4-2t^4-6t^2}{1+6t^2+9t^4-9t^2-6t^2-t^6} \\
&= 3\frac{1-2t^2+t^4}{1-3t^2+3t^4-t^6} \\
&= 3\frac{\left(1-t^2\right)^2}{\left(1-t^2\right)^3} \\
&= \frac{3}{1-t^2} \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left(3\operatorname{argth} t\right).
\end{aligned}$$

La fonction $\operatorname{argth}\frac{3\,\mathrm{Id}+\mathrm{Id}^3}{1+3\,\mathrm{Id}^2}-3\operatorname{argth}$ est par conséquent de dérivée nulle sur $]-1,1[$, donc y vaut constamment sa valeur en 0, à savoir

$$\operatorname{argth}\frac{3\cdot 0+0^3}{1+3\cdot 0^2}-3\operatorname{argth}0=\operatorname{argth}0-3\operatorname{argth}0=0,\ \textit{c. q. f. d.}.$$

On aurait pu également poser $a:=\operatorname{argth}t$ (d'où l'on tire $t=\operatorname{th}a$) et calculer

$$\begin{aligned}
\operatorname{argth}\frac{3t-t^3}{1+3t^2} &= \operatorname{argth}\frac{3\operatorname{th}a+\operatorname{th}^3 a}{1+3\operatorname{th}^2 a} \\
&= \operatorname{argth}\operatorname{th}(3a) \\
&= 3a \\
&= 3\operatorname{argth}a.
\end{aligned}$$

(g) Soit $s\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.

Le réel $\arcsin\left(3s-4s^3\right)$ fait sens ssi l'argument $3s-4s^3$ fait sens et appartient à l'ensemble $[-1,1]$ de définition de arcsin, *i. e.* ssi $-1\leq f(s)\leq 1$ où l'on a posé $f:=3\,\mathrm{Id}-4\,\mathrm{Id}^3$. Puisque $f'=3-12\,\mathrm{Id}^2$ est du signe de $\frac{1}{4}-\mathrm{Id}^2=\left(\frac{1}{2}-\mathrm{Id}\right)\left(\frac{1}{2}+\mathrm{Id}\right)$, la fonction f croît sur $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$. Au vu des valeurs $f\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$ et $f\left(\frac{1}{2}\right)=1$, on peut conclure que $f_{|\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]}$ prend ses valeurs dans $[-1,1]$, ce qui montre que $\arcsin\left(3s-4s^3\right)$ fait sens.

De même, le réel $\frac{\partial}{\partial s}\arcsin\left(3s-4s^3\right)$ fait sens ssi l'argument $3s-4s^3$ appartient à l'ensemble $]-1,1[$ de dérivabilité de arcsin, *i. e.* ssi $s\in\left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[$.

Ainsi, en supposant de plus $|s|<\frac{1}{2}$, on peut calculer la dérivée

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial s}\arcsin\left(3s-4s^3\right) &= \arcsin'\left(3s-4s^3\right)\times\frac{\partial}{\partial s}\left(3s-4s^3\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-\left(3s-4s^3\right)^2}}\times 3\left(1-4s^2\right) \\
&= \frac{3\left(1-4s^2\right)}{\sqrt{1-\left(9s^2-24s^4+16s^6\right)}}.
\end{aligned}$$

Puisque la somme des coefficient de s^2 au dénominateur fait $1-9+24-16=0$, on peut factoriser par s^2-1, ce qui donne

$$1-9s^2+24s^4-16s^6=\left(1-s^2\right)\left(16s^4-8s^2+1\right)=\left(1-s^2\right)\left(4s^2-1\right)^2.$$

On peut alors poursuivre le calcul de dérivée :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s}\arcsin\left(3s-4s^3\right) &= \frac{3\left(1-4s^2\right)}{\sqrt{\left(1-s^2\right)\left(4s^2-1\right)^2}}\\ &= \frac{3}{\sqrt{1-s^2}}\frac{1-4s^2}{\left|4s^2-1\right|}\\ &= \frac{3}{\sqrt{1-s^2}} \quad \text{car } |s|<\frac{1}{2}\\ &= \frac{\partial}{\partial s}\left(3\arcsin s\right).\end{aligned}$$

Il en résulte que la fonction $\arcsin\left(3\operatorname{Id}-4\operatorname{Id}^3\right)-3\arcsin$ est de dérivée nulle sur $\left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[$, elle y est donc constante et y vaut sa valeur en 0, à savoir $\arcsin\left(3\cdot0-4\cdot0^3\right)-3\arcsin 0=0$, ce qui permet de conclure après vérification de l'identité voulue en $\pm\frac{1}{2}$:

$$\arcsin\left(3\tfrac{1}{2}-4\left(\tfrac{1}{2}\right)^3\right)\overset{?}{=}3\arcsin\tfrac{1}{2}\iff\arcsin 1\overset{?}{=}3\tfrac{\pi}{6}\iff\tfrac{\pi}{2}\overset{?}{=}\tfrac{\pi}{2}, \text{ ce qui est vrai ;}$$
$$\arcsin\left(3\left(-\tfrac{1}{2}\right)-4\left(-\tfrac{1}{2}\right)^3\right)\overset{?}{=}3\arcsin\left(-\tfrac{1}{2}\right)\iff\arcsin\left(-1\right)\overset{?}{=}3\left(-\tfrac{\pi}{6}\right)\iff-\tfrac{\pi}{2}\overset{?}{=}-\tfrac{\pi}{2}, \text{ ce qui est vrai.}$$

On pourrait également poser $a:=\arcsin s$ (qui appartient à $\left[-\arcsin\frac{1}{2},\arcsin\frac{1}{2}\right]=\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$) (d'où l'on tire $s=\sin a$) et calculer

$$\begin{aligned}\arcsin\left(3s-4s^3\right) &= \arcsin\left(3\sin a-4\sin^3 a\right)\\ &= \arcsin\left(\sin 3a\right)\\ &= 3a \quad \text{car } 3a\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\\ &= 3\arcsin s.\end{aligned}$$

(h) Soit $x\in\mathbf{R}$.

Le réel $\arctan\operatorname{sh}x$ fait sens ssi l'argument $\operatorname{sh}x$ fait sens et appartient à l'ensemble $\mathbf{R}$ de définition de arctan, ce qui est vrai. De même, le réel $\frac{\partial}{\partial x}\left(\arctan\operatorname{sh}x\right)$ fait sens car arctan et sh sont dérivable sur $\mathbf{R}$.

Le réel $\arcsin\operatorname{th}x$ fait sens ssi l'argument $\operatorname{th}x$ fait sens et appartient à l'ensemble $[-1,1]$ de définition de arcsin, ce qui est vrai. De même, le réel $\frac{\partial}{\partial x}\left(\arcsin\operatorname{th}x\right)$ fait sens car th est dérivable sur $\mathbf{R}$ et prend ses valeurs dans $]-1,1[$ où arcsin est dérivable.

On a alors

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(\arctan\operatorname{sh}x\right) &= \arctan'\left(\operatorname{sh}x\right)\times\frac{\partial}{\partial x}\operatorname{sh}x\\ &= \frac{1}{1+\operatorname{sh}^2x}\times\operatorname{ch}x\\ &= \frac{1}{\operatorname{ch}^2x}\times\operatorname{ch}x\\ &= \frac{1}{\operatorname{ch}x}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\arcsin\operatorname{th}x &= \arcsin'\left(\operatorname{th}x\right)\times\frac{\partial}{\partial x}\operatorname{th}x\\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{th}^2x}}\frac{1}{\operatorname{ch}^2x}\\ &= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\operatorname{ch}^2x}}}\frac{1}{\operatorname{ch}^2x}\\ &= \frac{1}{\operatorname{ch}x} \quad \text{car } \operatorname{ch}x>0,\end{aligned}$$

donc la fonction $\arctan \operatorname{sh} - \arcsin \operatorname{th}$ est de dérivée nulle sur tout $\mathbf{R}$; elle y est donc constante égale à sa valeur en 0, à savoir

$$\arctan \operatorname{sh}(0) - \arcsin \operatorname{th}(0) = 0 - 0, \textit{ c. q. f. d.}.$$

On aurait également pu poser $\theta := \arctan \operatorname{sh} x$ (qui appartient à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$) (d'où l'on tire $\tan\theta = \operatorname{sh} x$ puis $x = \operatorname{argsh} \tan\theta$) et calculer

$$\begin{aligned}
\arcsin \operatorname{th} x &= \arcsin \operatorname{th} \operatorname{argsh} \tan\theta \\
&= \arcsin \frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} \\
&= \arcsin \frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2\theta}}} \\
&= \arcsin\sin\theta \qquad \text{car } \cos\theta > 0 \\
&= \theta \qquad \text{car } |\theta| < \frac{\pi}{2} \\
&= \arctan \operatorname{sh} x.
\end{aligned}$$

(i) Soit $\lambda \in \left]0, 1\right]$.

Le réel $2\arctan\sqrt{\frac{1-\lambda}{\lambda}} + \arcsin(2\lambda - 1)$ fait sens ssi l'argument $\frac{1-\lambda}{\lambda}$ fait sens et appartient à l'ensemble $\mathbf{R}_+$ de définition de $\sqrt{\cdot}$ et si l'argument $2\lambda - 1$ appartient à celui $[-1, 1]$ de arcsin, ce qui est vrai. De même, le réel $\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(2\arctan\sqrt{\frac{1-\lambda}{\lambda}} + \arcsin(2\lambda-1)\right)$ fait sens si l'argument $\frac{1-\lambda}{\lambda}$ fait sens et appartient à l'ensemble $\mathbf{R}_+^*$ de dérivabilité de $\sqrt{\cdot}$ et si l'argument $2\lambda - 1$ appartient à celui $\left]-1, 1\right[$ de arcsin, *i. e.* ssi $\lambda \in \left]0, 1\right[$.

En supposant de plus $\lambda < 1$, on peut ainsi dériver

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(2\arctan\sqrt{\frac{1-\lambda}{\lambda}} + \arcsin(2\lambda-1)\right) \\
= \;& 2\arctan'\left(\sqrt{\frac{1-\lambda}{\lambda}}\right) \times \frac{\partial}{\partial\lambda}\sqrt{\frac{1-\lambda}{\lambda}} + \arcsin'(2\lambda-1) \times \frac{\partial}{\partial\lambda}(2\lambda-1) \\
= \;& \frac{2}{1+\sqrt{\frac{1-\lambda}{\lambda}}^2} \times \frac{-\frac{1}{\lambda^2}}{2\sqrt{\frac{1-\lambda}{\lambda}}} + \frac{1}{\sqrt{1-(2\lambda-1)^2}} \times 2 \\
= \;& \frac{1}{\frac{1}{\lambda}} \frac{-\frac{1}{\lambda\sqrt{\lambda}}}{\sqrt{1-\lambda}} + \frac{2}{\sqrt{4\lambda-4\lambda^2}} \\
= \;& \frac{-1}{\sqrt{\lambda(1-\lambda)}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda-\lambda^2}} \\
= \;& 0.
\end{aligned}$$

La fonction $2\arctan\sqrt{\frac{1-\mathrm{Id}}{\mathrm{Id}}} + \arcsin(2\,\mathrm{Id} - 1)$ est donc constante sur $\left]0, 1\right[$ et y vaut sa valeur en $\frac{1}{2}$, à savoir

$$2\arctan\sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}} + \arcsin\left(2\frac{1}{2} - 1\right) = 2\arctan 1 + \arcsin 0 = 2\frac{\pi}{4} + 0 = \frac{\pi}{4},$$

ce qui permet de conclure à condition de vérifier l'égalité voulue en 1 :

$$2\arctan\sqrt{\frac{1-1}{1}} + \arcsin(2\cdot 1 - 1) = 2\arctan 0 + \arcsin 1 = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

On aurait également pu poser $\theta := \arccos\sqrt{\lambda}$ (qui appartient à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$) (d'où l'on tire $\lambda := \cos^2\theta$)

et calculer

$$\begin{aligned}
2\arctan\sqrt{\frac{1-\lambda}{\lambda}}+\arcsin(2\lambda-1) &= 2\arctan\sqrt{\frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}}+\arcsin\left(2\cos^2\theta-1\right)\\
&= 2\arctan\sqrt{\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}+\arcsin(\cos 2\theta)\\
&= 2\arctan\tan\theta+\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)\right) \qquad \text{car } \tan\theta\geq 0\\
&= 2\theta+\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right) \qquad \text{car } \theta \text{ et } \frac{\pi}{2}-2\theta \text{ sont dans } \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\\
&= \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

(j) Soit $\gamma\in\left]-1,0\right[$.

Le réel $\arctan\frac{\gamma-1}{\gamma}-\arctan\frac{\gamma}{\gamma+1}+\arctan\frac{1}{2\gamma^2}$ fait sens ssi les trois arguments de arctan font sens, *i. e.* ssi les dénominateurs γ, $\gamma+1$ et $2\gamma^2$ sont non nuls, ce qui est vrai. De même, le réel $\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\arctan\frac{\gamma-1}{\gamma}-\arctan\frac{\gamma}{\gamma+1}+\arctan\frac{1}{2\gamma^2}\right)$ fait sens dès que les trois arguments font sens et appartient à l'ensemble $\mathbf{R}$ de dérivabilité de arctan, ce qui est vrai. Ce réel dérivé vaut alors

$$\begin{aligned}
& \arctan'\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)\times\frac{\partial}{\partial\gamma}\frac{\gamma-1}{\gamma}-\arctan'\left(\frac{\gamma}{\gamma+1}\right)\times\frac{\partial}{\partial\gamma}\frac{\gamma}{\gamma+1}+\arctan'\left(\frac{1}{2\gamma^2}\right)\times\frac{\partial}{\partial\gamma}\frac{1}{2\gamma^2}\\
= & \frac{1}{1+\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)^2}\times\frac{1}{\gamma^2}-\frac{1}{1+\left(\frac{\gamma}{\gamma+1}\right)^2}\times\frac{\gamma+1-\gamma}{(\gamma+1)^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{1}{2\gamma^2}\right)^2}\times\frac{-2}{2\gamma^3}\\
= & \frac{1}{2\gamma^2-2\gamma+1}-\frac{1}{2\gamma^2+2\gamma+1}-\frac{4\gamma}{4\gamma^4+1}\\
= & \frac{\left(2\gamma^2+2\gamma+1\right)-\left(2\gamma^2-2\gamma+1\right)}{\left(\left(2\gamma^2+1\right)-2\gamma\right)\left(\left(2\gamma^2+1\right)+2\gamma\right)}-\frac{4\gamma}{4\gamma^4+1}\\
= & \frac{4\gamma}{\left(2\gamma^2+1\right)^2-4\gamma^2}-\frac{4\gamma}{4\gamma^4+1}\\
= & \frac{4\gamma}{4\gamma^4+1}-\frac{4\gamma}{4\gamma^4+1}\\
= & 0.
\end{aligned}$$

La fonction $\arctan\frac{\mathrm{Id}-1}{\mathrm{Id}}-\arctan\frac{\mathrm{Id}}{\mathrm{Id}+1}+\arctan\frac{1}{2\,\mathrm{Id}^2}$ est ainsi de dérivée nulle sur $\left]-1,0\right[$, donc y est constante ; en prenant sa limite en 0^-, on trouve que cette constante vaut

$$\underbrace{\arctan\underbrace{\frac{\mathrm{Id}-1}{\mathrm{Id}}}_{\longrightarrow\infty}}_{\longrightarrow\frac{\pi}{2}}-\underbrace{\arctan\underbrace{\frac{\mathrm{Id}}{\mathrm{Id}+1}}_{\longrightarrow 0}}_{\longrightarrow 0}+\underbrace{\arctan\underbrace{\frac{1}{2\,\mathrm{Id}^2}}_{\longrightarrow\infty}}_{\longrightarrow\frac{\pi}{2}}\longrightarrow\frac{\pi}{2}+0+\frac{\pi}{2}=\pi.$$

On aurait également pu passer par les complexes en se souvenant que $\operatorname{Arg}(a+ib)=\arctan\frac{b}{a}$ pour tous réels $a>0$ et b :

$$\begin{aligned}
& \arctan\frac{\gamma-1}{\gamma}-\arctan\frac{\gamma}{\gamma+1}+\arctan\frac{1}{2\gamma^2}\\
= & \arctan\frac{1-\gamma}{-\gamma}+\arctan\frac{-\gamma}{\gamma+1}+\arctan\frac{1}{2\gamma^2}\\
= & \operatorname{Arg}\left(-\gamma+i(1-\gamma)\right)+\operatorname{Arg}(\gamma+1-i\gamma)+\operatorname{Arg}\left(2\gamma^2+i\right)\\
= & \operatorname{Arg}\left[\left(-\gamma+i(1-\gamma)\right)(\gamma+1-i\gamma)\left(2\gamma^2+i\right)\right]\quad[2\pi]\\
= & \operatorname{Arg}\left[-4\gamma^4-1\right]\\
= & \pi\,;
\end{aligned}$$

la réponse ne tenant que *modulo* 2π, il manque quelque information, par exemple le fait que la somme cherchée, en tant que somme de trois arctangentes positives $\arctan\frac{1-\gamma}{-\gamma}+\arctan\frac{-\gamma}{\gamma+1}+\arctan\frac{1}{2\gamma^2}$, est une somme de trois réels de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, donc doit rester dans $\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$. Puisque π est le seul réel de cette intervalle valant π *modulo* 2π, c'est la somme cherchée.