Fonctions transcendantes
(T. G. 6)

1. (a) *Déterminer les logarithmes et arguments principaux des complexes suivants :* $2-2i$,$5\sqrt{3}-5i$, $-e^{\frac{5}{4}\pi i}$.
   (b) *En déduire les solutions des équations suivantes d'inconnue σ complexe :*
   $e^{\frac{\sigma}{2}-\ln\sqrt{2}}=2-2i$, $\qquad 5\sqrt{3}-5i=e^{3\sigma+\ln 5}$, $\qquad -e^{\frac{5}{4}\pi i}=18e^{\sigma}$.
2. *Déterminer les racines :*
   (a) *carrées de* -2, $169i$, $-1-i\sqrt{3}$ *;*
   (b) *cubiques de* $-2-2i$, $8, 2-2i$ *;*
   (c) *quatrièmes de* -16, $i-\sqrt{3}$, $64i$ *;*
   (d) *cinquièmes de* $16i-16\sqrt{3}$, -25, $4+4i$.
3. *Résoudre les équations suivantes d'inconnue réelle g :*
   (a) $\ln\left(g^2-4\right)+\ln 9=\ln(4g+1)$ *;*
   (b) $\ln|g-1|+\ln|g+2|=\ln\left|4g^2+3g-7\right|$ *;*
   (c) $18^{g^{18}}=42^{g^{42}}$ *;*
   (d) $g^{\sqrt[3]{g}}=\sqrt[3]{g}^{g}$ *;*
   (e) $3^{g+1}+9^g=\frac{7}{4}$ *;*
   (f) $4^g-3^{g-\frac{1}{2}}=3^{g+\frac{1}{2}}-2^{2g-1}$ *;*
   (g) $\lg_{42} g=\lg_g 42$ *;*
   (h) $\sqrt[18]{g}+\sqrt[42]{g}=2$.
4. *Résoudre les équations suivantes d'inconnue réelle (φ,k) :*
   (a) $\left\{\begin{array}{c} 8^{\varphi}=10k \\ 2^{\varphi}=5k \end{array}\right.$; (b) $\left\{\begin{array}{c} \varphi+k=9 \\ \lg_{18}\varphi+\lg_{18}k=1 \end{array}\right.$; (c) $\left\{\begin{array}{c} \varphi^2+k^2=13 \\ 2\lg_{42}\varphi+2\lg_{42}k=1 \end{array}\right.$.
5. *Montrer les égalités suivantes (hint : dériver ou reparamétrer) :*
   (a) $\forall a\geq 0,\ \arccos\frac{1-a}{1+a}=\arctan\sqrt{a}$ *;*
   (b) $\forall a\in\mathbf{R},\ \operatorname{argch}\sqrt{\frac{\operatorname{ch}a+1}{2}}=2a$ *;*
   (c) $\forall t\in\mathbf{R},\ \arcsin\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}=\arctan t$ *;*
   (d) $\forall c\in\left]-1,1\right],\ \arctan\sqrt{\frac{1-c}{1+c}}=\frac{1}{2}\arccos c$ *;*
   (e) $\forall m>0,\ \operatorname{argch}\frac{m+\frac{1}{m}}{2}=|\ln m|$
   (f) $\forall t\in\left]-1,1\right[,\ \operatorname{argth}\left(\frac{3t-t^3}{1+3t^2}\right)=3\operatorname{argth}t$ *;*
   (g) $\forall s\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right],\ \arcsin\left(3s-4s^3\right)=3\arcsin s$ *;*
   (h) $\forall x\in\mathbf{R},\ \arctan\operatorname{sh}x=\arcsin\operatorname{th}x$ *;*
   (i) $\forall\lambda\in\left]0,1\right],\ 2\arctan\sqrt{\frac{1-\lambda}{\lambda}}+\arcsin(2\lambda-1)=\frac{\pi}{2}$ *;*
   (j) $\forall\gamma\in\left]-1,0\right[,\arctan\frac{\gamma-1}{\gamma}-\arctan\frac{\gamma}{\gamma+1}+\arctan\frac{1}{2\gamma^2}=\pi$.
6. *Montrer les égalités suivantes :*
   (a) $\forall c\geq 1,\ \operatorname{argch}c=\ln\left(c+\sqrt{c^2-1}\right)$ *;*
   (b) $\forall s\in\mathbf{R},\ \operatorname{argsh}s=\ln\left(s+\sqrt{s^2+1}\right)$ *;*
   (c) $\forall t\in\left]-1,1\right[,\ \operatorname{argth}t=\frac{1}{2}\ln\frac{1+t}{1-t}$ *;*
   (d) $\forall c\in[-1,1],\ i\arccos c=\operatorname{Ln}\left(c+i\sqrt{1-c^2}\right)$ *;*
   (e) $\forall s\in[-1,1],\ i\arcsin s=\operatorname{Ln}\left(\sqrt{1-s^2}+is\right)$ *;*
   (f) $\forall t\in\mathbf{R},\ i\arctan t=\frac{1}{2}\operatorname{Ln}\frac{1+ti}{1-ti}$.