Calcul de dérivées

(T. G. 5)

1. Rappelons que $t \mapsto |t|$ est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ (elle y vaut $t \mapsto t$ de dérivée 1) et sur $\mathbf{R}_-^*$ (elle y vaut $t \mapsto -t$ de dérivée -1), donc est dérivable sur $\mathbf{R}^*$ de dérivée

$$|\cdot|' = \frac{\mathrm{Id}}{|\cdot|} = \frac{|\cdot|}{\mathrm{Id}}.$$

Avec des réels, cela s'écrirait

$$\forall a \neq 0,\ \frac{\partial}{\partial a}|a| = \frac{a}{|a|} = \frac{|a|}{a}.$$

(a) Soit a un réel. Le logarithme $\ln|a|$ fait sens ssi $|a| > 0$, *i. e.* ssi $a \neq 0$. Sous cette condition, on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial a}\ln|a| &\overset{\text{dérivée}}{\underset{\text{logarithmique}}{=}} \frac{\frac{\partial}{\partial a}|a|}{|a|} \\ &= \frac{\frac{|a|}{a}}{|a|} \\ &= \frac{1}{a}.\end{aligned}$$

Ce dernier fait sens pour $a \neq 0$, donc la fonction $t \mapsto \ln|t|$ est dérivable sur tout son ensemble de définition $\mathbf{R}^*$.

(b) Soit a un réel. Le logarithme $\ln(|\tan a|)$ fait sens ssi $\left\{\begin{array}{c}|\tan a| > 0 \\ \tan a \text{ fait sens}\end{array}\right.$, *i. e.* ssi $\left\{\begin{array}{c}\tan a \neq 0 \\ a \neq \frac{\pi}{2}\ [\pi]\end{array}\right.$, *i. e.* ssi $\left\{\begin{array}{c}a \neq 0\ [\pi] \\ a \neq \frac{\pi}{2}\ [\pi]\end{array}\right.$, *i. e.* ssi $a \neq 0\ \left[\frac{\pi}{2}\right]$. Sous cette condition, on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial a}\ln|\tan a| &\overset{\text{dérivée}}{\underset{\text{logarithmique}}{=}} \frac{\frac{\partial}{\partial a}|\tan a|}{|\tan a|} \\ &= \frac{1}{|\tan a|} \times \left(|\cdot|'(\tan a) \times \frac{\partial}{\partial a}\tan a\right) \\ &= \frac{1}{|\tan a|} \times \frac{|\tan a|}{\tan a} \times \left(1 + \tan^2 a\right) \\ &= \cot a + \tan a.\end{aligned}$$

Ce dernier fait sens ssi $\tan a$ fait sens et est non nul, donc la fonction $t \mapsto \ln|\tan t|$ est dérivable sur tout son ensemble de définition $\mathbf{R}\setminus\mathbf{Z}\frac{\pi}{2}$.

(c) Soit a un réel. Le cosinus $\cos\left(a^2 + a + 1\right)$ fait sens et l'on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial a}\cos\left(a^2 + a + 1\right) &= \cos'\left(a^2 + a + 1\right) \times \frac{\partial}{\partial a}\left(a^2 + a + 1\right) \\ &= -\sin\left(a^2 + a + 1\right) \times (2a + 1).\end{aligned}$$

Ce dernier fait sens, donc la fonction $t \mapsto \cos\left(t^2 + t + 1\right)$ est dérivable sur tout son ensemble de définition $\mathbf{R}$.

(d) Soit a un réel. Le sinus $\sin\left(\frac{3a-1}{a+2}\right)$ fait sens ssi le dénominateur $a+2$ est non nul, *i. e.* ssi $a \neq -2$. Sous cette condition, on peut écrire $\frac{3a-1}{a+2} = \frac{3(a+2)-7}{a+2} = 3 - \frac{7}{a+2}$, d'où

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial a}\left(\sin\left(\frac{3a-1}{a+2}\right)\right) &= \sin'\left(\frac{3a-1}{a+2}\right) \times \frac{\partial}{\partial a}\left(3 - \frac{7}{a+2}\right) \\ &= \cos\left(\frac{3a-1}{a+2}\right) \times \frac{7}{(a+2)^2}.\end{aligned}$$

Ce dernier fait sens ssi les dénominateurs $a + 2$ ne s'annulent pas, donc la fonction $t \mapsto \sin\left(\frac{3t-1}{t+2}\right)$ est dérivable sur tout son ensemble de définition $\mathbf{R}\setminus\{-2\}$.

(e) Soit a un réel. La tangente $\tan(42a+18)$ fait sens ssi $42a+18 \neq \frac{\pi}{2}\ [\pi]$, , *i. e.* ssi $a \neq \frac{\pi}{84} - \frac{3}{7}\ \left[\frac{\pi}{42}\right]$. Sous cette condition, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a} \tan(42a+18) &= \tan'(42a+18) \times \frac{\partial}{\partial a}(42a+18) \\ &= \frac{42}{\cos^2(42a+18)}. \end{aligned}$$

Ce dernier fait sens ssi le dénominateur $\cos^2(42a+18)$ est non nul, *i. e.* ssi $\tan(42a+8)$ fait sens. La fonction $t \mapsto \tan(42t+18)$ est donc dérivable sur tout ensemble de définition $\mathbf{R} \setminus \left(\frac{\pi}{84} - \frac{3}{7} + \mathbf{Z}\frac{\pi}{2}\right)$.

(f) Soit a un réel. L'exponentielle $e^{3\cos(2a)}$ fait sens et l'on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a} e^{3\cos(2a)} &= e^{3\cos(2a)} \times \frac{\partial}{\partial a}(3\cos(2a)) \\ &= e^{3\cos(2a)} \times 3\cos'(2a) \times \frac{\partial}{\partial a}(2a) \\ &= -6e^{3\cos(2a)}\sin(2a). \end{aligned}$$

Ce dernier fait sens, donc la fonction $t \mapsto e^{3\cos(2t)}$ est dérivable sur tout son ensemble de définition $\mathbf{R}$.

(g) Soit a un réel. Le logarithme $\ln(4a-1)$ fait sens ssi $4a-1>0$, *i. e.* ssi $a > \frac{1}{4}$. Sous cette condition, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a} \ln(4a-1) &\underset{\text{logarithmique}}{\overset{\text{dérivée}}{=}} \frac{\frac{\partial}{\partial a}(4a-1)}{4a-1} \\ &= \frac{4}{4a-1}. \end{aligned}$$

Ce dernier fait sens ssi le dénominateur $4a-1$ est non nul, *i. e.* ssi $a \neq \frac{1}{4}$. La fonction $t \mapsto \ln(4t-1)$ est donc dérivable sur tout son ensemble de définition $\left]\frac{1}{4}, \infty\right[$.

★ ici, la dérivée $\frac{\partial}{\partial a}\ln(4a-1)$ fait apparemment sens pour plus de réels a que pour ce dont elle est la dérivée (ici $\ln(4a-1)$) : il ne faut pas oublier qu'on ne peut dériver une fonction qu'en un point où cette dernière est définie (comment sinon donner sens au taux d'accroissement au point considéré ?). Ainsi, l'ensemble de définition d'une dérivée f' est TOUJOURS inclus dans celui de f.

(h) Soit a un réel. Puisque $a^2-6a+9=(a-3)^2$, le logarithme $\ln\left(a^2-6a+9\right) = 2\ln(a-3)$ fait sens ssi $a-3>0$, *i. e.* ssi $a>3$. On a alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a} \ln\left(a^2-6a+9\right) &= \frac{\partial}{\partial a} 2\ln(a-3) \\ &\underset{\text{logarithmique}}{\overset{\text{dérivée}}{=}} 2\frac{\frac{\partial}{\partial a}(a-3)}{a-3} \\ &= \frac{2}{a-3}. \end{aligned}$$

Ce dernier fait sens ssi $a-3 \neq 0$, donc la fonction $t \mapsto \ln\left(t^2-6t+9\right)$ est dérivable sur tout son ensemble de définition $]3, \infty[$.

(i) Soit a un réel. La puissance $\cos^3\left(a^5\right)$ fait sens et l'on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a} \cos^3\left(a^5\right) &= \left[\cos^3\right]'\left(a^5\right) \times \frac{\partial}{\partial a} a^5 \\ &= \left[3\cos^2 \times \cos'\right]\left(a^5\right) \times 5a^4 \\ &= -15\cos^2\left(a^5\right)\sin\left(a^5\right). \end{aligned}$$

Ce dernier fait sens, donc la fonction $t \mapsto \cos^3\left(t^5\right)$ est dérivable sur tout son ensemble de définition $\mathbf{R}$.

(j) Soit a un réel. Puisque $a^2+2a-5=(a+1)^2-6$, l'inverse $\frac{1}{a^2+2a-5}$ fait sens ssi $(a+1)^2 \neq 6$, *i. e.* ssi $a \neq -1 \pm \sqrt{6}$. Sous cette condition, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a} \frac{1}{a^2+2a-5} &= -\frac{\frac{\partial}{\partial a}\left(a^2+2a-5\right)}{\left(a^2+2a-5\right)^2} \\ &= -\frac{2a+2}{\left(a^2+2a-5\right)^2}. \end{aligned}$$

Ce dernier fait sens ssi le dénominateur $\left(a^2+2a-5\right)^2$ ne s'annule pas, donc la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2+2t-5}$ est dérivable sur tout son ensemble de définition $\mathbf{R} \setminus \left\{-1-\sqrt{6}, -1+\sqrt{6}\right\}$.

(k) Soit a un réel. Puisque $a^2+2a+5=(a+1)^2+4$, l'inverse $\frac{1}{(a^2+2a+5)^{18}}$ fait sens et l'on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a} \frac{1}{\left(a^2+2a+5\right)^{18}} &= -18 \frac{\frac{\partial}{\partial a}\left(a^2+2a+5\right)}{\left(a^2+2a+5\right)^{19}} \\ &= -36 \frac{a+1}{\left(a^2+2a+5\right)^{19}}. \end{aligned}$$

Ce dernier fait sens ssi le dénominateur $\left((a+1)^2+4\right)^{19}$ est non nul, donc la fonction $t \mapsto \frac{1}{(t^2+2t+5)^{18}}$ est dérivable sur tout son ensemble de définition $\mathbf{R}$.

(l) Soit a un réel. L'inverse $\frac{1}{\cos a}$ fait sens ssi le dénominateur $\cos a$ est non nul, *i. e.* ssi $a \neq \frac{\pi}{2} \ [\pi]$. Sous cette condition, on a

$$\frac{\partial}{\partial a} \frac{1}{\cos a} = -\frac{\frac{\partial}{\partial a} \cos a}{(\cos a)^2} = \frac{\sin a}{\cos^2 a}.$$

Ce dernier fait sens ssi le dénominateur $\cos^2 a$ est non nul, donc la fonction $t \mapsto \frac{1}{\cos t}$ est dérivable sur tout son ensemble de définition $\mathbf{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2}+\mathbf{Z}\pi\right)$.

(m) Soit a un réel. Puisque $a^6-4a^3+3=\left(a^3-1\right)\left(a^3-3\right)$, l'inverse $\frac{1}{a^6-4a^3+3}$ fait sens ssi le dénominateur $\left(a^3-1\right)\left(a^3-3\right)$ est non nul, *i. e.* ssi a n'est une racine cubique ni de 1 ni de 3, *i. e.* ssi $a \in \left\{1, j, j^1, \sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{3}j, \sqrt[3]{3}^2\right\}$ où $j := e^{\frac{2i\pi}{3}}$, *i. e.* (puisque a est réel) ssi $a \notin \left\{1, \sqrt[3]{3}\right\}$. Sous cette condition, on a alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a} \frac{1}{a^6-4a^3+3} &= -\frac{\frac{\partial}{\partial a}\left(a^6-4a^3+3\right)}{\left(a^6-4a^3+3\right)^2} \\ &= -\frac{6a^5-12a^2}{\left(a^6-4a^3+3\right)^2} \\ &= 6a^2 \frac{2-a^3}{\left(a^3-1\right)^2\left(a^3-3\right)^2}. \end{aligned}$$

Ce dernier fait sens ssi le dénominateur $\left(a^3-1\right)\left(a^3-3\right)$ est non nul, donc la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^6-4t^3+3}$ est dérivable sur tout son ensemble de définition $\mathbf{R} \setminus \left\{1, \sqrt[3]{3}\right\}$.

(n) Soit a un réel. La racine $\sqrt{3-5a}$ fait sens ssi $3-5a \geq 0$, *i. e.* ssi $a \leq \frac{3}{5}$. Sous cette condition, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a} \sqrt{3-5a} &= \frac{\frac{\partial}{\partial a}(3-5a)}{2\sqrt{3-5a}} \\ &= -\frac{5}{2\sqrt{3-5a}}. \end{aligned}$$

Ce dernier fait sens ssi le dénominateur $\sqrt{3-5a}$ fait sens et est non nul, *i. e.* ssi $3-5a>0$, *i. e.* ssi $a<\frac{3}{5}$. La fonction $t \mapsto \sqrt{3-5t}$ est donc dérivable sur $\left]-\infty, \frac{3}{5}\right[$, *i. e.* sur son ensemble de définition privé de $\left\{\frac{3}{5}\right\}$.

(o) Soit a un réel. Puisque $3a^2+2a-1=(3a-1)(a+1)$, le radical $\sqrt{3a^2+2a-1}$ fait sens ssi $(3a-1)(a+1) \geq 0$, *i. e.* ssi $\left\{ \text{ou} \begin{array}{c} a \geq \frac{1}{3} \\ a \leq -1 \end{array} \right.$. Sous cette condition, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a} \sqrt{3a^2+2a-1} &= \frac{\frac{\partial}{\partial a}\left(3a^2+2a-1\right)}{2\sqrt{3a^2+2a-1}} \\ &= \frac{3a+1}{\sqrt{3a-1}\sqrt{a+1}}. \end{aligned}$$

Ce dernier fait sens ssi le dénominateur $\sqrt{(3a-1)(a+1)}$ fait sens et est non nul, *i. e.* ssi $\left\{ \text{ou} \begin{array}{c} a > \frac{1}{3} \\ a < -1 \end{array} \right.$. La fonction $t \mapsto \sqrt{3t^2+2t-1}$ est donc dérivable sur $]-\infty, -1[\cup \left]\frac{1}{3}, \infty\right[$, *i. e.* sur son ensemble de définition privé de $\left\{-1, \frac{1}{3}\right\}$.

(p) Soit a un réel. Le produit $\sqrt{a}\sqrt[3]{a}\sqrt[5]{a} = a^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{5}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}} = a^{\frac{15+10+6}{30}} = a^{\frac{31}{30}}$ fait sens ssi $a \geq 0$ et on a sous cette condition

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial a}\sqrt{a}\sqrt[3]{a}\sqrt[5]{a} &= \frac{\partial}{\partial a}a^{\frac{31}{30}} \\ &= \frac{31}{30}a^{\frac{1}{30}} \\ &= \frac{31}{30}\sqrt[30]{a}.\end{aligned}$$

Ce dernier fait sens ssi $a \geq 0$, donc la fonction $t \mapsto \sqrt{t}\sqrt[3]{t}\sqrt[5]{t}$ est dérivable sur tout son ensemble de définition $\mathbf{R}_+$.

(q) Soit a un réel. L'inverse $\frac{1}{(7-2a^2)(a+3)}$ fait sens ssi le dénominateur $\left(7-2a^2\right)(a+3)$ ne s'annule pas, *i. e.* ssi $\left\{\text{ou}\begin{array}{c} 7-2a^2 \neq 0 \\ a+3 \neq 0\end{array}\right.$, *i. e.* ssi $\left\{\text{ou}\begin{array}{c} a^2 \neq \pm\sqrt{\frac{7}{2}} \\ a \neq -3\end{array}\right.$. Sous cette condition, on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial a}\frac{1}{(7-2a^2)(a+3)} &= -\frac{\frac{\partial}{\partial a}\left[\left(7-2a^2\right)(a+3)\right]}{\left[\left(7-2a^2\right)(a+3)\right]^2} \\ &= -\frac{\frac{\partial}{\partial a}\left(-2a^3-6a^2+7a+21\right)}{\left(7-2a^2\right)^2(a+3)^2} \\ &= \frac{6a^2+12a-7}{\left(7-2a^2\right)^2(a+3)^2}.\end{aligned}$$

(r) Soit a un réel. La fraction $\frac{\sin^4(3a)}{\cos^3(2a)}$ fait sens ssi son dénominateur $\cos^3(2a)$ est non nul, *i. e.* ssi $2a \neq \frac{\pi}{2}\ [\pi]$, *i. e.* ssi $a \neq \frac{\pi}{4}\ \left[\frac{\pi}{2}\right]$. Sous cette condition, on a

$$\frac{\partial}{\partial a}\frac{\sin^4(3a)}{\cos^3(2a)} = \frac{\left(\frac{\partial}{\partial a}\sin^4(3a)\right)\times\cos^3(2a) - \sin^4(3a)\times\left(\frac{\partial}{\partial a}\cos^3(2a)\right)}{\left[\cos^3(2a)\right]^2};$$

calculons à part

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial a}\sin^4(3a) &= \left[\sin^4\right]'(3a)\times\frac{\partial}{\partial a}(3a) = \left[4\sin^3\times\sin'\right](3a)\times 3 = 12\sin^3(3a)\cos(3a) \text{ et} \\ \frac{\partial}{\partial a}\cos^3(2a) &= \left[\cos^3\right]'(2a)\times\frac{\partial}{\partial a}(2a) = \left[3\cos^2\times\cos'\right](2a)\times 2 = -6\cos^2(2a)\sin(2a),\end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial a}\frac{\sin^4(3a)}{\cos^3(2a)} &= \frac{12\sin^3(3a)\cos(3a)\times\cos^3(2a) - \sin^4(3a)\times\left(-6\cos^2(2a)\sin(2a)\right)}{\cos^6(2a)} \\ &= 6\sin^3(3a)\,\frac{2\cos(3a)\cos^2(2a)+\sin^2(3a)\sin(2a)}{\cos^4(2a)}.\end{aligned}$$

Ce dernier fait sens ssi le dénominateur $\cos^4(2a)$ est non nul, donc la fonction $t \mapsto \frac{\sin^4(3t)}{\cos^3(2t)}$ est dérivable sur tout son ensemble de définition $\mathbf{R}\setminus\left(\frac{\pi}{4}+\mathbf{Z}\frac{\pi}{2}\right)$.

(s) Soit a un réel. L'exponentielle $e^{42\ln\left(a^3+1\right)}$ fait sens ssi le logarithme $\ln\left(a^3+1\right)$ fait sens, *i. e.* ssi $a^3+1>0$, *i. e.* ssi $a>-1$. Sous cette condition, on peut écrire $e^{42\ln\left(a^3+1\right)} = \left[e^{\ln\left(a^3+1\right)}\right]^{42} = \left(a^3+1\right)^{42}$, d'où

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial a}e^{42\ln\left(a^3+1\right)} &= \frac{\partial}{\partial a}\left(\left(a^3+1\right)^{42}\right) \\ &= 42\left(a^3+1\right)^{41}\times\frac{\partial}{\partial a}\left(a^3+1\right) \\ &= 126\left(a^3+1\right)^{41}a^2.\end{aligned}$$

Ce dernier fait sens, donc la fonction $t \mapsto e^{42\ln\left(t^3+1\right)}$ est dérivable sur tout son ensemble de définition $]-1,\infty[$.

(t) Soit a un réel. Le logarithme $\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)$ fait sens ssi $a+\sqrt{a^2+1}>0$: cela est clairement vérifié lorsque $a>0$ (la somme de deux nombres strictement positifs le reste) et cela équivaut lorsque $a\leq 0$ à

$$\sqrt{a^2+1}\overset{?}{>}-a\underset{\text{positif}}{\overset{\text{tout est}}{\iff}}a^2+1\overset{?}{>}(-a)^2\iff 1\overset{?}{>}0,\text{ ce qui est vrai.}$$

On peut donc considérer

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial a}\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right) &= \frac{\frac{\partial}{\partial a}\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)}{a+\sqrt{a^2+1}} \\ &= \frac{1+\frac{\frac{\partial}{\partial a}\left(a^2+1\right)}{2\sqrt{a^2+1}}}{a+\sqrt{a^2+1}} \\ &= \frac{1+\frac{2a}{2\sqrt{a^2+1}}}{a+\sqrt{a^2+1}} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{a^2+1}+a}{\sqrt{a^2+1}}}{a+\sqrt{a^2+1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}.\end{aligned}$$

Ce dernier fait sens ssi le dénominateur $\sqrt{a^2+1}$ fait sens et est non nul, *i. e.* ssi $a^2+1>0$, ce qui est vrai. La fonction $t\mapsto\ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)$ est donc dérivable sur tout son ensemble de définition $\mathbf{R}$.

(u) Soit a un réel. La racine $\sqrt{3\sin^2 a-7}$ fait sens ssi $3\sin^2 a-7\geq 0$, *i. e.* ssi $\sin^2\geq\frac{7}{3}$, ce qui est faux puisque $\sin^2 a$ est plus petit que 1. La fonction $t\mapsto\sqrt{3\sin^2 t-7}$ est donc définie nulle part, *a fortiori* dérivable nulle part.

(v) Soit a un réel. L'exponentielle $e^{\sqrt{\sin^2 a+3}}$ fait sens ssi la racine $\sqrt{\sin^2 a+3}$ fait sens, *i. e.* ssi $\sin^2 a+3\geq 0$, *i. e.* ssi $\sin^2 a\geq -3$, ce qui est vrai puisque $(\sin a)^2$ est positif. On peut donc considérer

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial a}e^{\sqrt{\sin^2 a+3}} &= e^{\sqrt{\sin^2 a+3}}\times\frac{\partial}{\partial a}\sqrt{\sin^2 a+3} \\ &= e^{\sqrt{\sin^2 a+3}}\frac{\frac{\partial}{\partial a}\left(\sin^2 a+3\right)}{2\sqrt{\sin^2 a+3}} \\ &= e^{\sqrt{\sin^2 a+3}}\frac{2\sin a\sin' a}{2\sqrt{\sin^2 a+3}} \\ &= e^{\sqrt{\sin^2 a+3}}\frac{\sin a\cos a}{\sqrt{\sin^2 a+3}}.\end{aligned}$$

Ce dernier fait sens ssi le dénominateur $\sqrt{\sin^2 a+3}$ fait sens et est non nul, *i. e.* ssi $\sin^2 a+3>0$, ce qui est vrai (puisque $\sin^2 a\geq 0$). La fonction $t\mapsto e^{\sqrt{\sin^2 t+3}}$ est donc dérivable sur tout son ensemble de définition.

(w) Soit a un réel. Si $a\neq -3$, on peut simplifier $\frac{2a-1}{a+3}=\frac{2(a+3)-7}{a+3}=2-\frac{7}{a+3}$. Le produit $a\sqrt{\frac{2a-1}{a+3}}$ fait donc sens ssi la racine $\sqrt{2-\frac{7}{a+3}}$ fait sens, *i. e.* ssi le dénominateur $a+3$ est non nul et si $2-\frac{7}{a+3}\geq 0$, *i. e.* ssi $\left\{\begin{array}{c}a\neq -3\\ \frac{1}{a+3}\leq\frac{2}{7}\end{array}\right.$, *i. e.* ssi $\left\{\text{ou}\begin{array}{c}a<-3\\ a>-3\text{ et }\frac{7}{2}\leq a+3\end{array}\right.$, *i. e.* ssi $\left\{\text{ou}\begin{array}{c}a<-3\\ \frac{1}{2}\leq a\end{array}\right.$. Sous cette condition, on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial a}\sqrt{2-\frac{7}{a+3}} &= \frac{\frac{\partial}{\partial a}\left(2-\frac{7}{a+3}\right)}{2\sqrt{2-\frac{7}{a+3}}} \\ &= \frac{\frac{7}{(a+3)^2}}{2\sqrt{\frac{2a-1}{a+3}}} \\ &= \frac{7}{2}\frac{1}{\sqrt{2a-1}}\frac{1}{\sqrt{a+3}^3},\end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial a}\left(a\sqrt{\frac{2a-1}{a+3}}\right) &= \sqrt{\frac{2a-1}{a+3}} + a\frac{\partial}{\partial a}\sqrt{2-\frac{7}{a+3}} \\
&= \frac{\sqrt{2a-1}}{\sqrt{a+3}} + \frac{7a}{2}\frac{1}{\sqrt{2a-1}}\frac{1}{\sqrt{a+3}^3} \\
&= \sqrt{\frac{2a-1}{a+3}}\left(1+\frac{\frac{7a}{2}}{2a-1}\frac{1}{a+3}\right).
\end{aligned}$$

Ce dernier fait sens ssi la racine $\sqrt{\frac{2a-1}{a+3}}$ fait sens et si les dénominateurs $2a-1$ et $a+3$ sont non nuls, *i. e.* (d'après le début de la question) ssi $\left\{ \text{ou} \begin{array}{c} a<-3 \\ \frac{1}{2}\leq a \end{array} \right.$ et si $\left\{ \begin{array}{c} a\neq\frac{1}{2} \\ a\neq -3 \end{array} \right.$, *i. e.* ssi $\left\{ \text{ou} \begin{array}{c} a<-3 \\ \frac{1}{2}< a \end{array} \right.$. La fonction $t\mapsto t\sqrt{\frac{2t-1}{t+3}}$ est donc dérivable sur $]-\infty,-3[\,\cup\,]\frac{1}{2},\infty[$, *i. e.* sur son ensemble de définition privé de $\left\{\frac{1}{2}\right\}$.