Équations différentielles

(T. G. 5')

Solution proposée.

2. Pour chacune des questions suivantes, on cherchera des solutions à valeurs dans $\mathbf{K}$.

   (a) On reconnaît une équation différentielle affine d'ordre 1.

   Soit $f : \mathbf{R}_+^* \longrightarrow \mathbf{K}$. La fonction f est solution ssi $f' + \frac{2}{\mathrm{Id}} f = 2$. Une primitive de $\frac{2}{\mathrm{Id}}$ étant $2\ln$, le facteur intégrant vaut $e^{2\ln} = \mathrm{Id}^2$. On a alors les équivalences

$$\begin{aligned}
f \text{ solution} &\iff f' + \frac{2}{\mathrm{Id}} f = 2 \\
&\iff \mathrm{Id}^2 f' + 2\,\mathrm{Id}\, f = 2\,\mathrm{Id}^2 \\
&\iff \left[\mathrm{Id}^2 f\right]' = \left[\frac{2}{3}\,\mathrm{Id}^3\right]' \\
&\iff \left[\mathrm{Id}^2 f - \frac{2}{3}\,\mathrm{Id}^3\right]' = 0 \\
&\iff \mathrm{Id}^2 f - \frac{2}{3}\,\mathrm{Id}^3 \text{ est constante (sur } \mathbf{R}_+^*) \\
&\iff \exists C \in \mathbf{K},\ \mathrm{Id}^2 f - \frac{2}{3}\,\mathrm{Id}^3 = C \\
&\iff \exists C \in \mathbf{K},\ f = \frac{C}{\mathrm{Id}^2} + \frac{2}{3}\,\mathrm{Id} \qquad \begin{array}{l}\text{(on peut diviser car } \mathrm{Id}^2 \\ \text{ne s'annule pas sur } \mathbf{R}_+^*)\end{array}
\end{aligned}$$

   (b) On reconnaît une équation différentielle affine d'ordre 1.

   Soit $f :]1, \infty[\longrightarrow \mathbf{K}$. La fonction f est solution ssi $\left(\mathrm{Id}^2 - 1\right) f' + 2\,\mathrm{Id}\, f = 1$. Ici, pas besoin du facteur intégrant, le premier membre est déjà sous la forme de la dérivée d'un produit. On a ainsi les équivalences :

$$\begin{aligned}
f \text{ solution} &\iff \left(\mathrm{Id}^2 - 1\right) f' + 2\,\mathrm{Id}\, f = 1 \\
&\iff \left[\left(\mathrm{Id}^2 - 1\right) \times f\right]' = \mathrm{Id}' \\
&\iff \left[\left(\mathrm{Id}^2 - 1\right) f - \mathrm{Id}\right]' = 0 \\
&\iff \left(\mathrm{Id}^2 - 1\right) f - \mathrm{Id} \text{ est constante sur }]1, \infty[\\
&\iff \exists C \in \mathbf{K},\ \left(\mathrm{Id}^2 - 1\right) f - \mathrm{Id} = C \\
&\iff \exists C \in \mathbf{K},\ f = \frac{C + \mathrm{Id}}{\mathrm{Id}^2 - 1} \qquad \begin{array}{l}\text{(on peut diviser car } \mathrm{Id}^2 - 1 \\ \text{ne s'annule pas sur }]1, \infty[\,)\end{array}.
\end{aligned}$$

   (c) On reconnaît une équation différentielle affine d'ordre 1 soumise à une condition initiale : il s'agit d'un problème de Cauchy.

   Soit $f : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbf{K}$. La fonction f est solution ssi $\begin{cases} f' + f \tan = \sin(2\cdot) \\ f(0) = 1 \end{cases}$. Une primitive de $\tan = \frac{\sin}{\cos} = -\frac{\cos'}{\cos} = -\left[\ln \circ \cos\right]'$ étant $-\ln \circ \cos$, le facteur intégrant vaut $e^{-\ln \circ \cos} = \frac{1}{\cos}$, d'où les équivalences

$$\begin{aligned}
& f' + f\frac{\sin}{\cos} = \sin(2\cdot) \\
\iff\ & \frac{1}{\cos}f' + \frac{\sin}{\cos^2}f = 2\sin\cos\times\frac{1}{\cos} \\
\iff\ & \left[\frac{1}{\cos}f\right]' = [-2\cos]' \\
\iff\ & \left[\frac{1}{\cos}f + 2\cos\right]' = 0 \\
\iff\ & \frac{1}{\cos}f + 2\cos \text{ est constante (sur } \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\text{)} \\
\iff\ & \exists C\in\mathbf{K},\ \frac{1}{\cos}f + 2\cos = C \\
\iff\ & \exists C\in\mathbf{K},\ f = C\cos - 2\cos^2.
\end{aligned}$$

On en déduit les équivalences

$$\begin{aligned}
f \text{ solution } \iff\ & \begin{cases} f' + f\frac{\sin}{\cos} = \sin(2\cdot) \\ f(0) = 1 \end{cases} \\
\iff\ & \begin{cases} \exists C\in\mathbf{K},\ f = C\cos - 2\cos^2 \\ f(0) = 1 \end{cases} \\
\iff\ & \exists C\in\mathbf{K},\ \begin{cases} f = C\cos - 2\cos^2 \\ f(0) = 1 \end{cases} \\
\iff\ & \exists C\in\mathbf{K},\ \begin{cases} f = C\cos - 2\cos^2 \\ C\cos 0 - 2\cos^2 0 = 1 \end{cases} \\
\iff\ & \exists C\in\mathbf{K},\ \begin{cases} f = C\cos - 2\cos^2 \\ C = 3 \end{cases} \\
\iff\ & f = 3\cos - 2\cos^2.
\end{aligned}$$

(d) On reconnaît une équation différentielle affine d'ordre 1 soumise à une condition initiale : il s'agit d'un problème de Cauchy.

Soit $f : \left]0,\frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbf{K}$. La fonction f est solution ssi $\begin{cases} f'\tan - f = 0 \\ f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 \end{cases}$. Puisque $\tan$ ne s'annule pas sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, on a l'équivalence $f'\tan - f = 0 \iff f' - f\cot = 0$. Puisque $-\cot = -\frac{\cos}{\sin} = -\frac{\sin'}{\sin} = [-\ln\circ\sin]'$, le facteur intégrant vaut $e^{-\ln\circ\sin} = \frac{1}{\sin}$, d'où les équivalences

$$\begin{aligned}
& f'\tan - f = 0 \\
\iff\ & f' - \cot f = 0 \\
\iff\ & f'\frac{1}{\sin} - f\frac{\cos}{\sin^2} = 0 \qquad \text{(on peut diviser car } \sin \text{ ne s'annule pas sur } \left]0,\tfrac{\pi}{2}\right[\text{)} \\
\iff\ & \left[f\frac{1}{\sin}\right]' = 0 \\
\iff\ & \frac{f}{\sin} \text{ est constante (sur } \left]0,\frac{\pi}{2}\right[\text{)} \\
\iff\ & \exists C\in\mathbf{K},\ \frac{f}{\sin} = C \\
\iff\ & \exists C\in\mathbf{K},\ f = C\sin.
\end{aligned}$$

Par conséquent, on a les équivalences

$$\begin{aligned}
f\text{ solution} &\iff \begin{cases} f'\tan - f = 0 \\ f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \exists C \in \mathbf{K},\ f = C\sin \\ f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 \end{cases} \\
&\iff \exists C \in \mathbf{K},\ \begin{cases} f = C\sin \\ f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 \end{cases} \\
&\iff \exists C \in \mathbf{K},\ \begin{cases} f = C\sin \\ C\sin\frac{\pi}{6} = 1 \end{cases} \\
&\iff \exists C \in \mathbf{K},\ \begin{cases} f = \frac{C}{\sin} \\ C = 2 \end{cases} \\
&\iff f = 2\sin.
\end{aligned}$$

(e) On reconnaît une équation différentielle affine d'ordre 1 soumise à une condition initiale : il s'agit d'un problème de Cauchy.

Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{K}$. La fonction f est solution ssi $\begin{cases} f' - 2f = \mathrm{Id}^2 \\ f(0) = 1 \end{cases}$. Une primitive de -2 étant $-2\,\mathrm{Id}$, le facteur intégrant vaut $e^{-2\,\mathrm{Id}}$. Par ailleurs, pour primitiver le second membre multiplié par le facteur intégrant, on peut intégrer par parties $\mathrm{Id}^2 e^{-2\,\mathrm{Id}}$ plusieurs fois de suite :

$$\begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{c}{\xrightarrow{\hspace{12em}}} \\ \mathrm{Id}^2 & 2\,\mathrm{Id} & 2 & 0 \\ e^{-2\,\mathrm{Id}} & -\frac{1}{2}e^{-2\,\mathrm{Id}} & \frac{1}{4}e^{-2\,\mathrm{Id}} & -\frac{1}{8}e^{-2\,\mathrm{Id}} \\ \multicolumn{4}{c}{\xleftarrow{\hspace{12em}}} \end{array}$$ (la flèche indique le sens de dérivation).

On trouve comme primitive $\left(\mathrm{Id}^2 \times \frac{-1}{2}e^{-2\,\mathrm{Id}}\right) - \left(2\,\mathrm{Id} \times \frac{1}{4}e^{-2\,\mathrm{Id}}\right) + \left(2 \times \frac{-1}{8}e^{-2\,\mathrm{Id}}\right) = -\frac{e^{-2\,\mathrm{Id}}}{4}\left(2\,\mathrm{Id}^2 + 2\,\mathrm{Id} + 1\right)$. On en déduit les équivalences

$$\begin{aligned}
& f' - 2f = \mathrm{Id}^2 \\
\iff\ & e^{-2\,\mathrm{Id}} f' - 2e^{-2\,\mathrm{Id}} f = \mathrm{Id}^2 e^{-2\,\mathrm{Id}} \\
\iff\ & \left[e^{-2\,\mathrm{Id}} f\right]' = \left[-\frac{e^{-2\,\mathrm{Id}}}{4}\left(2\,\mathrm{Id}^2 + 2\,\mathrm{Id} + 1\right)\right]' \\
\iff\ & \left[e^{-2\,\mathrm{Id}} f + \frac{e^{-2\,\mathrm{Id}}}{4}\left(2\,\mathrm{Id}^2 + 2\,\mathrm{Id} + 1\right)\right]' = 0 \\
\iff\ & e^{-2\,\mathrm{Id}} f + \frac{e^{-2\,\mathrm{Id}}}{4}\left(2\,\mathrm{Id}^2 + 2\,\mathrm{Id} + 1\right) \text{ est constante (sur } \mathbf{R}) \\
\iff\ & \exists C \in \mathbf{K},\ e^{-2\,\mathrm{Id}} f + \frac{e^{-2\,\mathrm{Id}}}{4}\left(2\,\mathrm{Id}^2 + 2\,\mathrm{Id} + 1\right) = C \\
\iff\ & \exists C \in \mathbf{K},\ f = Ce^{2\,\mathrm{Id}} - \frac{\mathrm{Id}^2}{2} - \frac{\mathrm{Id}}{2} - \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, on a les équivalences

$$\begin{aligned}
f\text{ solution} &\iff \begin{cases} f' - 2f = \mathrm{Id}^2 \\ f(0) = 1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \exists C \in \mathbf{K},\ f = Ce^{2\,\mathrm{Id}} - \frac{\mathrm{Id}^2}{2} - \frac{\mathrm{Id}}{2} - \frac{1}{4} \\ f(0) = 1 \end{cases} \\
&\iff \exists C \in \mathbf{K},\ \begin{cases} f = Ce^{2\,\mathrm{Id}} - \frac{\mathrm{Id}^2}{2} - \frac{\mathrm{Id}}{2} - \frac{1}{4} \\ f(0) = 1 \end{cases} \\
&\iff \exists C \in \mathbf{K},\ \begin{cases} f = Ce^{2\,\mathrm{Id}} - \frac{\mathrm{Id}^2}{2} - \frac{\mathrm{Id}}{2} - \frac{1}{4} \\ Ce^{2\cdot 0} - \frac{0^2}{2} - \frac{0}{2} - \frac{1}{4} = 1 \end{cases} \\
&\iff \exists C \in \mathbf{K},\ \begin{cases} f = Ce^{2\,\mathrm{Id}} - \frac{\mathrm{Id}^2}{2} - \frac{\mathrm{Id}}{2} - \frac{1}{4} \\ C = \frac{5}{4} \end{cases} \\
&\iff f = \frac{5}{4}e^{2\,\mathrm{Id}} - \frac{\mathrm{Id}^2}{2} - \frac{\mathrm{Id}}{2} - \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

(f) On reconnaît une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. Son polynôme caractéristique vaut $\chi := X^2 - 5X + 6$, son discriminant vaut $(-5)^2 - 4 \times 6 = 1$, donc les racines de χ sont $\frac{5 \pm \sqrt{1}}{2}$, à savoir 2 et 3. On en déduit le plan affine des solutions, qui est ici un plan *vectoriel* puisque l'équation est linéaire :

$$\mathbf{K}e^{2\,\mathrm{Id}} + \mathbf{K}e^{3\,\mathrm{Id}}.$$

En d'autres termes, si I un intervalle et f une fonction de I dans $\mathbf{K}$, on a les équivalences

$$\begin{aligned} f \text{ solution} &\iff f'' - 5f' + 6f = 0 \\ &\iff \begin{matrix} \exists A \in \mathbf{K} \\ \exists B \in \mathbf{K} \end{matrix},\ f = Ae^{2\,\mathrm{Id}} + Be^{3\,\mathrm{Id}}. \\ &\iff \begin{matrix} \exists A \in \mathbf{K} \\ \exists B \in \mathbf{K} \end{matrix},\ \forall t \in I,\ f(t) = Ae^{2t} + Be^{3t}. \end{aligned}$$

(g) On reconnaît une équation différentielle affine d'ordre 2 à coefficients constants. Son polynôme caractéristique vaut $\chi := X^2 + 4 = (X + 2i)(X - 2i)$, les racines de χ sont $0 \pm 2i$. On en déduit le plan vectoriel des solutions linéaires :

$$\begin{matrix} \text{si } \mathbf{K} = \mathbf{C} : & \mathbf{C}e^{2i\,\mathrm{Id}} + \mathbf{C}e^{-2i\,\mathrm{Id}} \\ \text{si } \mathbf{K} = \mathbf{R} : & \mathbf{R}\cos(2\cdot) + \mathbf{R}\sin(2\cdot) \end{matrix}.$$

Cherchons à présent *une* solution. Le second membre est de la forme $e^{\lambda\,\mathrm{Id}}P$ où le scalaire $\lambda := 1$ n'est pas racine de χ et où le polynôme $P := 10$ est de degré nul, donc on peut chercher une solution sous la forme $e^{1\,\mathrm{Id}} \times Q$ où Q est un polynôme constant. Soit $a \in \mathbf{K}$; posons $u := a\exp$. On a alors

$$u'' + 4u = (a\exp)'' + 4a\exp = 5a\exp,$$

d'où les implications

$$u \text{ solution} \Longleftarrow u'' + 4u = 10\exp \Longleftarrow 5a\exp = 10\exp \Longleftarrow a = 2.$$

Conclusion : le plan affine des solutions est

$$\begin{matrix} \text{si } \mathbf{K} = \mathbf{C} : & 2\exp + \mathbf{C}e^{2i\,\mathrm{Id}} + \mathbf{C}e^{-2i\,\mathrm{Id}} \\ \text{si } \mathbf{K} = \mathbf{R} : & 2\exp + \mathbf{R}\cos(2\cdot) + \mathbf{R}\sin(2\cdot) \end{matrix}.$$

En d'autres termes, si I un intervalle et f une fonction de I dans[1] $\mathbf{R}$, on a les équivalences

$$\begin{aligned} f \text{ solution} &\iff f'' + 4f = 10\exp \\ &\iff \begin{matrix} \exists A \in \mathbf{R} \\ \exists B \in \mathbf{R} \end{matrix},\ f = 2\exp + A\cos(2\cdot) + B\sin(2\cdot) \\ &\iff \begin{matrix} \exists A \in \mathbf{R} \\ \exists B \in \mathbf{R} \end{matrix},\ \forall t \in I,\ f(t) = 2e^t + A\cos(2t) + B\sin(2t). \end{aligned}$$

(h) On reconnaît une équation différentielle affine d'ordre 2 à coefficients constants, soumise à deux conditions initiales (c'est donc un problème de Cauchy). Son polynôme caractéristique vaut $\chi := X^2 + X + 1 = (X - j)(X - j^2)$ où $j := e^{\frac{2i\pi}{3}}$, les racines de χ sont $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$. On en déduit le plan vectoriel des solutions linéaires (sans conditions initiales) dans le cas réel[2] ($\mathbf{K} = \mathbf{R}$) :

$$\mathbf{R}e^{-\frac{\mathrm{Id}}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\right) + \mathbf{R}e^{-\frac{\mathrm{Id}}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\right).$$

Cherchons à présent *une* solution. Le second membre est de la forme $e^{\lambda\,\mathrm{Id}}P$ où le scalaire $\lambda := 0$ n'est pas racine de χ et où le polynôme $P := X^3$ est de degré 3. On peut donc chercher une solution sous la forme $\exp^{0\,\mathrm{Id}} \times Q$ où Q est un polynôme de degré au plus 3.

Soient $a, b, c, d \in \mathbf{R}$; posons $u := a\,\mathrm{Id}^3 + b\,\mathrm{Id}^2 + c\,\mathrm{Id} + d$. On a successivement

$$u' = 3a\,\mathrm{Id}^2 + 2b\,\mathrm{Id} + c \qquad \text{et} \qquad u'' = 6a\,\mathrm{Id} + 2b,$$

[1] le cas complexe s'écrirait de même

[2] pour le cas complexe, on procédera comme dans les équations des deux questions précédentes

d'où $u''+u'+u=a\operatorname{Id}^3+(b+3a)\operatorname{Id}^2+(c+2b+6a)\operatorname{Id}+(d+c+2b)$. Il en résulte les implications

$$\begin{aligned}
u \text{ solution (sans conditions initiales)} &\Longleftarrow u''+u'+u=\operatorname{Id}^3\\
&\Longleftarrow a\operatorname{Id}^3+(b+3a)\operatorname{Id}^2+(c+2b+6a)\operatorname{Id}+(d+c+2b)=\operatorname{Id}^3\\
&\Longleftarrow \begin{cases} a=1\\ b+3a=0\\ c+2b+6a=0\\ d+c+2b=0\end{cases}\\
&\Longleftarrow (a,b,c,d)=(1,-3,0,6)\\
&\Longleftarrow u=\operatorname{Id}^3-3\operatorname{Id}^2+6.
\end{aligned}$$

Conclusion (partielle) : le plan affine des solution (sans conditions initiales) est

$$\operatorname{Id}^3-3\operatorname{Id}^2+6+\mathbf{R}e^{-\frac{\operatorname{Id}}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\right)+\mathbf{R}e^{-\frac{\operatorname{Id}}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\right).$$

Soit I un intervalle et $f:I\longrightarrow\mathbf{R}$. On a les équivalences

$$\begin{aligned}
f\text{ solution} &\iff \begin{cases} f''+f'+f=\operatorname{Id}^3\\ f(0)=1\\ f\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)=e^{1-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}}+\frac{\pi^3}{3\sqrt{3}}-\pi^2+6\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} \begin{array}{l}\exists A\in\mathbf{R}\\ \exists B\in\mathbf{R}\end{array},\ f=\operatorname{Id}^3-3\operatorname{Id}^2+6+Ae^{-\frac{\operatorname{Id}}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\right)+Be^{-\frac{\operatorname{Id}}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\right)\\ f(0)=1 \quad\text{et}\quad f\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)=e^{1-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}}+\frac{\pi^3}{3\sqrt{3}}-\pi^2+6\end{cases}\\
&\iff \begin{array}{l}\exists A\in\mathbf{R}\\ \exists B\in\mathbf{R}\end{array},\ \begin{cases} f=\operatorname{Id}^3-3\operatorname{Id}^2+6+Ae^{-\frac{\operatorname{Id}}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\right)+Be^{-\frac{\operatorname{Id}}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\right)\\ f(0)=1 \quad\text{et}\quad f\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)=e^{1-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}}+\frac{\pi^3}{3\sqrt{3}}-\pi^2+6\end{cases}\\
&\iff \begin{array}{l}\exists A\in\mathbf{R}\\ \exists B\in\mathbf{R}\end{array},\ \begin{cases} f=\operatorname{Id}^3-3\operatorname{Id}^2+6+Ae^{-\frac{\operatorname{Id}}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\right)+Be^{-\frac{\operatorname{Id}}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\right)\\ 0^3-3\cdot0^2+6+Ae^{-\frac{0}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}0\right)+Be^{-\frac{0}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}0\right)=1\\ \left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)^3-3\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)^2+6+Ae^{-\frac{\frac{\pi}{\sqrt{3}}}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)+Be^{-\frac{\frac{\pi}{\sqrt{3}}}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)\\ \qquad=e^{1-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}}+\frac{\pi^3}{3\sqrt{3}}-\pi^2+6\end{cases}\\
&\iff \begin{array}{l}\exists A\in\mathbf{R}\\ \exists B\in\mathbf{R}\end{array},\ \begin{cases} f=\operatorname{Id}^3-3\operatorname{Id}^2+6+Ae^{-\frac{\operatorname{Id}}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\right)+Be^{-\frac{\operatorname{Id}}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\right)\\ 6+A=1 \quad\text{et}\quad Be^{-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}}=e^{1-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}}\end{cases}\\
&\iff \begin{array}{l}\exists A\in\mathbf{R}\\ \exists B\in\mathbf{R}\end{array},\ \begin{cases} f=\operatorname{Id}^3-3\operatorname{Id}^2+6+Ae^{-\frac{\operatorname{Id}}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\right)+Be^{-\frac{\operatorname{Id}}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\right)\\ A=5 \quad\text{et}\quad B=e\end{cases}\\
&\iff f=\operatorname{Id}^3-3\operatorname{Id}^2+6+5e^{-\frac{\operatorname{Id}}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\right)+e^{1-\frac{\operatorname{Id}}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\right).
\end{aligned}$$

(i) On reconnaît une équation différentielle affine d'ordre 2 à coefficients constants. Son polynôme caractéristique vaut $\chi:=X^2-2X+1=(X-1)^2$, il possède donc une racine double 1, d'où le plan vectoriel des solutions linéaires

$$\mathbf{K}\exp+\mathbf{K}\operatorname{Id}\times\exp.$$

Cherchons *une* solution. Le second membre n'est pas de la forme du cours ; écoutons l'indication et prions pour que la fonction donnée $u := \frac{\exp}{1+\mathrm{Id}}$ soit solution. On a

$$\begin{aligned}
u' &= \frac{\exp \times (1+\mathrm{Id}) - \exp \times 1}{(1+\mathrm{Id})^2} = \frac{\exp \times \mathrm{Id}}{(1+\mathrm{Id})^2} \text{ puis} \\
u'' &= \frac{\exp \times (1+\mathrm{Id}) \times (1+\mathrm{Id})^2 - \exp \times \mathrm{Id} \times 2\,(1+\mathrm{Id})}{(1+\mathrm{Id})^4} \\
&= \exp \frac{1+\mathrm{Id}^2}{(1+\mathrm{Id})^3}, \text{ d'où} \\
u'' - 2u' + u &= \frac{\exp}{(1+\mathrm{Id})^3} \left(\underbrace{\left(1+\mathrm{Id}^2\right) - 2\,\mathrm{Id}\,(1+\mathrm{Id}) + (1+\mathrm{Id})^2}_{=2} \right) \\
&= \frac{2\exp}{(1+\mathrm{Id})^3}, \text{ donc } u \text{ est solution.}
\end{aligned}$$

Conclusion : le plan affine des solutions est

$$\frac{\exp}{1+\mathrm{Id}} + \mathbf{K}\exp + \mathbf{K}\,\mathrm{Id} \times \exp .$$

En d'autres termes, si I est un intervalle et si f est une fonction de I dans $\mathbf{K}$, on a les équivalences

$$\begin{aligned}
f \text{ solution} &\iff f'' - 2f' + f = \frac{2\exp}{(1+\mathrm{Id})^3} \\
&\iff \begin{array}{l} \exists A \in \mathbf{K} \\ \exists B \in \mathbf{K} \end{array},\ f = \frac{\exp}{1+\mathrm{Id}} + A\exp + B\,\mathrm{Id} \times \exp \\
&\iff \begin{array}{l} \exists A \in \mathbf{K} \\ \exists B \in \mathbf{K} \end{array},\ \forall t \in I,\ f = \frac{e^t}{1+t} + Ae^t + Bte^t.
\end{aligned}$$