Transformations géométriques

(T. G. 4)

Solution proposée.

1. (a) Translater par un vecteur revient à ajouter l'affixe de ce vecteur, donc la transformation donnée s'écrit $\mathrm{Id}+2-i$.

   (b) Une rotation est une similitude directe de rapport 1, donc le cours s'applique : en notant z' l'image par la transformation considérée d'un complexe z, on aura

$$z' = \boxed{1e^{i\frac{\pi}{2}}}z + \left(1 - \boxed{1e^{i\frac{\pi}{2}}}\right)1 = iz + (1-i)\,.$$

   (c) Même chose : $z' = \boxed{1e^{i\frac{\pi}{6}}}z + \left(1 - \boxed{1e^{i\frac{\pi}{6}}}\right)3 = \frac{\sqrt{3}+i}{2}z + \frac{3}{2}\left(2-\sqrt{3}-i\right)$.

   (d) Une homothétie est une similitude d'angle nul, donc le cours s'applique :

$$z' = \frac{1}{3}z + \left(1-\frac{1}{3}\right)(2+i) = \frac{z}{3} + \frac{2}{3}(2+i)\,.$$

   (e) Même chose : $z' = 3z + (1-3)(-i) = 3z + 2i$.

   (f) Le dictionnaire du cours donne directement $z' = 18e^{42i}z$.

   (g) Le cours donne

$$z' = 2e^{i\frac{\pi}{3}}z + \left(1-e^{i\frac{\pi}{3}}\right)(-1-i) = \left(1+\sqrt{3}i\right)z + (i-1)\sqrt{3}.$$

   (h) Le cours nous dit qu'une réflexion d'axe Δ est de la forme $\alpha\overline{\mathrm{Id}}+\beta$ où α est un complexe de module 1 (une réflexion est une isométrie, elle multiplie les distances par 1) et d'argument le double de l'angle fait entre $\mathbf{R}$ et Δ (et β est un complexe à déterminer). Ici, ce dernier angle vaut $-\frac{\pi}{4}$, d'où $\alpha = 1e^{i2\left(-\frac{\pi}{4}\right)} = e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$. L'origine étant par ailleurs fixe par la réflexion considérée (elle appartient à son axe), on peut écrire $\alpha\overline{0}+\beta = 0$, d'où l'on tire $\beta = 0$. Finalement, on obtient l'expression suivante : $z' = -i\overline{z}$.

   Autre solution. On calcule l'image de deux points afin d'obtenir deux équations en α et β. On a déjà dit que l'orgine était fixe, d'où $\beta = 0$. Par ailleurs, le point $1-i$ est également fixe (il est sur l'axe), d'où $1-i = \alpha\overline{1-i}$ et $\alpha = \frac{1-i}{\overline{1-i}} = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{e^{i\frac{\pi}{4}}} = e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$.

   (i) Même chose : la réflexion étudiée s'écrit $\alpha\overline{\mathrm{Id}}+\beta$ avec α de module 1 et d'argument le double de l'arc-tangente de la pente de l'axe de la réflexion donnée, à savoir $2\operatorname{atn}2$. En remarquant pour tout réel t l'identité $1+it = \sqrt{1+t^2}e^{i\operatorname{atn}t}$ (faire un dessin[1]), on en déduit

$$\alpha = e^{2i\operatorname{atn}2} = \left(e^{i\operatorname{atn}2}\right)^2 = \left(\frac{1+2i}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{4i-3}{5}.$$

   Par ailleurs, le point $3i$ est sur l'axe de la réflexion de l'énoncé (puisque ses coordonnées vérifient l'équation donnée), donc est fixe par cette dernière, ce qui s'écrit $3i = \alpha\overline{3i}+\beta$, d'où $\beta = 3i(1+\alpha) = 6\frac{i-2}{5}$. Finalement, la réflexion considérée s'écrit sous forme complexe $\frac{4i-3}{5}\overline{\mathrm{Id}}+6\frac{i-2}{5}$.

   Autre solution. Le point $-\frac{3}{2}$ est fixe car il est sur l'axe de la réflexion (il en vérifie l'équation donnée), ce qui s'écrit $-\frac{3}{2} = \alpha\overline{-\frac{3}{2}}+\beta$. De même pour le point $3i$ (déjà dit), ce qui donne une seconde équation $3i = \alpha\overline{3i}+\beta$. On obtient ainsi un système $\left\{\begin{array}{c} 3\alpha-2\beta = 3 \\ -3i\alpha+\beta = 3i \end{array}\right.$, qui se réécrit

[1] ou calculer directement $e^{i\operatorname{atn}}t = \cos\operatorname{atn}t + i\sin\operatorname{atn}t = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} + i\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ (*cf.* TD 3 pour le calcule de $f\circ a$ où f est l'une des trois fonctions trigo sin, cos, tan et où a est l'une des trois réciproques asn, acs, atn)

$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -3i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3i \end{pmatrix}$. Son déterminant vaut $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -3i & 1 \end{vmatrix} = 3 - 6i$, d'où une unique solution

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 3i & 1 \end{vmatrix}}{3-6i} = \frac{3+6i}{3-6i} = \frac{1+2i}{1-2i} = \frac{(1+2i)^2}{1^2+2^2} = \frac{4i-3}{5} \text{ et} \\ \beta &= \frac{\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -3i & 3i \end{vmatrix}}{3-6i} = \frac{9i+9i}{3-6i} = \frac{6i}{1-2i} = \frac{6i\,(1+2i)}{1^2+2^2} = \frac{6\,(i-2)}{5}. \end{aligned}$$

(j) Notre réflexion glissée est de la forme $\alpha\overline{\mathrm{Id}} + \beta$ où α est de module 1 et d'argument le double de l'angle entre $\mathbf{R}$ et l'axe $i\mathbf{R} + 2$, d'où $\alpha = e^{i\pi} = -1$. Par ailleurs, le point 2 (qui est sur l'axe de la réflexion étudiée) est envoyé sur $2 + (-3) = -1$, ce qui s'écrit $\alpha\overline{2} + \beta = -1$, d'où $\beta = 1$. On obtient finalement l'écriture complexe $1 - \overline{\mathrm{Id}}$.

Autre solution. L'image du point $i + 2$ (qui est sur l'axe de la réflexion) est $i + 2 + (-3)$, d'où une équation $i - 1 = \alpha\overline{i+2} + \beta$. On obtient avec l'autre équation trouvée précédemment un système $\begin{pmatrix} 2-i & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i-1 \\ -1 \end{pmatrix}$ dont le déterminant vaut $\begin{vmatrix} 2-i & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -i$. Il y a donc une unique solution

$$\alpha = \frac{1}{-i} \begin{vmatrix} i-1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = i\,(i) = -1 \text{ et } \beta = \frac{1}{-i} \begin{vmatrix} 2-i & i-1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = i\,(-i) = 1.$$

(k) Notre réflexion glissée est de la forme $\alpha\overline{\mathrm{Id}} + \beta$ où α est de module 1 et d'argument le double de l'arc-tangente de la pente de l'axe, d'où

$$\alpha = e^{2i\,\mathrm{atn}\left(-\frac{1}{2}\right)} = \left(e^{i\,\mathrm{atn}\left(-\frac{1}{2}\right)}\right)^2 = \left(\frac{2-i}{\sqrt{2^2+1^2}}\right)^2 = \frac{3-4i}{5}.$$

Par ailleurs, le point 3 (qui est sur l'axe de la réflexion étudiée puisqu'il en satisfait l'équation donnée) est envoyé sur $3 + (-4+2i) = 2i - 1$, ce qui s'écrit $\alpha\overline{3} + \beta = 2i - 1$, d'où $\beta = 2i - 1 - \frac{9-12i}{5} = \frac{22i-14}{5}$. On obtient finalement l'écriture complexe $z' = \frac{3-4i}{5}\overline{z} + 2\frac{11i-7}{5}$.

Autre solution. L'image du point $\frac{3i}{2}$ (qui est sur l'axe de la réflexion) est $\frac{3i}{2} + (2i - 4)$, d'où une équation $\frac{7i}{2} - 4 = \alpha\overline{\frac{3i}{2}} + \beta$. On obtient avec l'autre équation trouvée précédemment un système $\begin{pmatrix} 3i & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8-7i \\ 2i-1 \end{pmatrix}$ dont le déterminant vaut $\begin{vmatrix} 3i & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 3i + 6$. Il y a donc une unique solution

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\begin{vmatrix} 8-7i & -2 \\ 2i-1 & 1 \end{vmatrix}}{3i+6} = \frac{6-3i}{3i+6} = \frac{2-i}{2+i} = \frac{(2-i)^2}{2^2+1^2} = \frac{3-4i}{5} \text{ et} \\ \beta &= \frac{\begin{vmatrix} 3i & 8-7i \\ 3 & 2i-1 \end{vmatrix}}{3i+6} = \frac{-30+18i}{3i+6} = 2\frac{3i-5}{2+i} = 2\frac{(3i-5)\,(2-i)}{2^2+1^2} = 2\frac{11i-7}{5}. \end{aligned}$$

(l) L'angle entre $\mathbf{R}$ et l'axe $\mathbf{R} - 5i$ étant nul, le cours donne

$$z' = \boxed{3e^{i0}}\overline{z} + (2-5i) - \boxed{3e^{i0}}\overline{2-5i} = 3\overline{z} - 4\,(1+5i)\,.$$

(m) Comme à la question (k), l'angle entre l'horizontale et l'axe de la similitude donnée vaut l'arc-tangente de la pente de cet axe, à savoir $2\,\mathrm{atn}\left(-\frac{1}{3}\right)$. Vu le calcul de

$$e^{i2\,\mathrm{atn}\left(-\frac{1}{3}\right)} = \left(e^{i\,\mathrm{atn}\left(-\frac{1}{3}\right)}\right)^2 = \left(\frac{3-i}{\sqrt{3^2+1^1}}\right)^2 = \frac{8-6i}{10} = \frac{4-3i}{5},$$

on en déduit que la similitude étudiée s'écrit $4\frac{4-3i}{5}\overline{\mathrm{Id}} + \beta$ pour un β à déterminer. Or le centre $i - 1$ est fixe, ce qui s'écrit $4\frac{4-3i}{5}\overline{i-1} + \beta = i - 1$, d'où

$$\beta = i - 1 + 4\frac{(4-3i)\,(i+1)}{5} = \frac{5i-5}{5} + 4\frac{7+i}{5} = \frac{23+9i}{5}.$$

Finalement, la similitude étudiée s'écrit $4\frac{4-3i}{5}\overline{\mathrm{Id}}+\frac{23+9i}{5}$.

Autre solution. Le point 2 est sur l'axe de la similitude de l'énoncé (car ses coordonnées vérifient l'équation de l'axe donnée), donc cette dernière agit sur 2 comme l'homothétie de centre $i-1$ et de rapport 4. On en déduit une autre manière de calculer l'image $\alpha\overline{2}+\beta$ de 2, d'où l'équation $\alpha\overline{2}+\beta = 4\,2+(1-4)\,(i-1) = 11-3i$. Il en résulte (avec l'équation donnée par le centre $i-1$ fixé) un système $\begin{pmatrix} -i-1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i-1 \\ 11-3i \end{pmatrix}$ dont le déterminant vaut $\begin{vmatrix} -i-1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3-i$. Il y a donc une unique solution

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\begin{vmatrix} i-1 & 1 \\ 11-3i & 1 \end{vmatrix}}{-3-i} = \frac{-12+4i}{-3-i} = 4\frac{3-i}{3+i} = 4\frac{(3-i)^2}{3^2+1^2} = 2\frac{8-6i}{5} = 4\frac{4-3i}{5} \text{ et} \\ \beta &= \frac{\begin{vmatrix} -i-1 & i-1 \\ 2 & 11-3i \end{vmatrix}}{-3-i} = \frac{-12-10i}{-3-i} = 2\frac{6+5i}{3+i} = 2\frac{(6+5i)\,(3-i)}{3^2+1^2} = 2\frac{23+9i}{5}. \end{aligned}$$

2. On abrégera chacune des transformations ci-dessus par la lettre de la question correspondante. On fixe un complexe z. On s'intéressera ici seulement aux composées $\binom{a\circ b}{b\circ a}$, $\binom{a\circ h}{h\circ a}$, $\binom{h\circ k}{k\circ h}$, $\binom{d\circ g}{g\circ d}$ et $\binom{k\circ l}{l\circ k}$.

2.1 $a\circ b$ et $b\circ a$

On a $[a\circ b]\,(z) = a\,(b\,(z)) = (iz+1-i)+2-i = iz+3-2i$. On reconnaît une transformation de la forme $\alpha\,\mathrm{Id}+\beta$ avec $|\alpha|=1$, c'est donc une isométrie positive, *i. e.* un déplacement, à savoir ou bien une translation (exclu car $\alpha\neq 1$) ou bien une rotation d'angle $\arg\alpha = \arg i = \frac{\pi}{2}$. En notant ω son centre, ce dernier est fixe, d'où l'équation $\omega = i\omega+3-2i$ et $\omega = \frac{3-2i}{1-i} = \frac{5+i}{2}$. (Sanity check : le cours nous dit que la composée d'une translation par une rotation non triviale est une rotation de même angle).

On a $[b\circ a]\,(z)) = b\,(a\,(z)) = b\,(z+2-i) = i\,(z+2-i)+1-i = iz+2+i$. On reconnaît encore une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ mais dont le centre ω vérifie cette fois l'équation $\omega = i\omega+2+i$, *i. e.* $\omega = \frac{2+i}{1-i} = \frac{1+3i}{2}$. (La composée $a\circ b$ diffère donc de la composée $b\circ a$.)

Sanity check. La composée $a\circ b$ se réécrit $a\circ b\circ a\circ a^{-1}$, donc est la conjuguée de la rotation $b\circ a$ par a ; l'angle est donc inchangé et le centre de $a\circ b$ est l'image de celui de $b\circ a$ par ce qui conjugue (ici a), à savoir $\frac{1+3i}{2}+2-i = \frac{5+i}{2}$.

2.2 $a\circ h$ et $h\circ a$

On a $[a\circ h]\,(z) = a\,(h\,(z)) = a\,(-i\overline{z}) = -i\overline{z}+2-i$. On reconnaît une transformation de la forme $\alpha\overline{\mathrm{Id}}+\beta$ avec $|\alpha|=1$, c'est donc une isométrie négative, *i. e.* un anti-déplacement, à savoir une réflexion glissée dont l'axe fait avec $\mathbf{R}$ un angle $\frac{1}{2}\arg\alpha = \frac{\arg(-i)}{2} = -\frac{\pi}{4}$. En prenant deux points tests, par exemple $\left\{\begin{array}{l} 0\mapsto 2-i \\ 1\mapsto 2-2i \end{array}\right.$, on voit sur un dessin que l'axe de la réflexion a pour équation $x+y=\frac{1}{2}$ et que le vecteur vaut $\frac{3}{2}\,(1-i)$. (Sanity check : la composée d'une réflexion par une translation est toujours une réflexion glissée – même si le vecteur de la translatin n'est pas dans la direction de l'axe de la réflexion.)

On a $[h\circ a]\,(z) = h\,(a\,(z)) = h\,(z+2-i) = -i\overline{(z+2-i)} = -i\overline{z}+1-2i$. Comme avant, on reconnaît un antidéplacement, *i. e.* une réflexion glissée d'axe faisant un angle $-\frac{\pi}{4}$ avec $\mathbf{R}$. Les points tests $\left\{\begin{array}{l} 0\mapsto 1-2i \\ -1\mapsto 1-i \end{array}\right.$ montrent avec un schéma que l'axe a pour équation $x+y+\frac{1}{2}=0$ et que le vecteur vaut encore $\frac{3}{2}\,(1-i)$.

2.3 $h\circ k$ et $k\circ h$

On a $h\,(k\,(z)) = h\left(\frac{3-4i}{5}\overline{z}+2\frac{11i-7}{5}\right) = -i\overline{\left(\frac{3-4i}{5}\overline{z}+2\frac{11i-7}{5}\right)} = \frac{4-3i}{5}z+2\frac{7i-11}{5}$. On reconnaît une transformation de la forme $\alpha\,\mathrm{Id}+\beta$ avec $|\alpha| = 1\neq\alpha$, il s'agit donc d'une rotation d'angle $\arg\frac{4-3i}{5} = \operatorname{atn}\left(-\frac{3}{4}\right)$. Le centre ω fixé vaut

$$\frac{\beta}{1-\alpha} = \frac{2\frac{7i-11}{5}}{1-\frac{4-3i}{5}} = 2\frac{7i-11}{1+3i} = 2\,(1+4i)\,.$$

(Sanity check : la composée de deux réflexions glissées est la composée de deux réflexions par deux translations, *a fortiori* la composée d'une rotation/translation par deux translation, soit encore une rotation/translation.)

On a $k(h(z)) = k(-i\overline{z}) = \frac{3-4i}{5}\overline{-i\overline{z}} + 2\frac{11i-7}{5} = \frac{4+3i}{5}z + 2\frac{11i-7}{5}$, on reconnaît encore une rotation mais cette fois d'angle atn $\frac{3}{4}$ et de centre $\frac{2\frac{11i-7}{5}}{1-\frac{4+3i}{5}} = 2\frac{11i-7}{1-3i} = -2(4+i)$.

Sanity check. La composée $k \circ h = h^{-1} \circ h \circ k \circ h$ est la conjuguée de la rotation $h \circ k$ par la réflexion $h^{-1} = h$, donc est une rotation de même angle et dont le centre est l'image de celui de $h \circ k$ par ce qui conjugue (ici h), à savoir $h(2(1+4i)) = -2(4+i)$.

2.4 $d \circ g$ et $g \circ d$

On a $[d \circ g](z)) = d(g(z)) = d\left(\left(1+i\sqrt{3}\right)z + (i-1)\sqrt{3}\right) = \frac{1+i\sqrt{3}}{3}z + \frac{i-1}{3}\sqrt{3} + \frac{2}{3}(2+i)$. On reconnaît une transformation de la forme $\alpha \operatorname{Id} + \beta$ avec $|\alpha| = \frac{\sqrt{1^2+\sqrt{3}^2}}{3} = \frac{2}{3}$, c'est donc une similitude directe de rapport $\frac{2}{3}$, d'angle $\arg\alpha = \arg\frac{\alpha}{|\alpha|} = \arg\frac{1+i\sqrt{3}}{2} = \arg e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{6}$. Son centre ω est donné par l'équation des points fixes, laquelle donne

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{\beta}{1-\alpha} = \frac{\frac{4-\sqrt{3}}{3} + \frac{2+\sqrt{3}}{3}i}{\frac{2-i\sqrt{3}}{3}} = \frac{\left(4-\sqrt{3}\right) + \left(2+\sqrt{3}\right)i}{2-i\sqrt{3}} \\ &= \frac{\left(\left(4-\sqrt{3}\right) + \left(2+\sqrt{3}\right)i\right)\left(2+i\sqrt{3}\right)}{2^2+\sqrt{3}^2} \\ &= \frac{5-4\sqrt{3}}{7} + \frac{1+6\sqrt{3}}{7}i. \end{aligned}$$

(Sanity check : le rapport trouvé est le produit des rapports de l'homothétie d et de la similitude g, l'angle trouvé est la somme de ceux de d et de g.)

On a $g(d(z)) = g\left(\frac{z}{3} + \frac{2}{3}(2+i)\right) = \left(1+i\sqrt{3}\right)\left(\frac{z}{3} + \frac{2}{3}(2+i)\right) + (i-1)\sqrt{3}$. On reconnaît encore une similitude directe de rapport $\frac{2}{3}$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$. Le centre ω est toutefois différent car le terme constant β l'est :

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{\beta}{1-\alpha} = \frac{3\beta}{2-i\sqrt{3}} = \frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)2(2+i) + 3(i-1)\sqrt{3}}{2-i\sqrt{3}} \\ &= \frac{\left(4-5\sqrt{3}+i\left(2+7\sqrt{3}\right)\right)\left(2+i\sqrt{3}\right)}{2^2+\sqrt{3}^2} \\ &= -\frac{12\sqrt{3}+13}{7} + \frac{18\sqrt{3}-11}{7}i. \end{aligned}$$

Sanity check. La composée $g \circ d = d^{-1} \circ d \circ g \circ d$ est la conjugée de la similitude $d \circ g$ par l'homothétie $d^{-1} = {}^{3}\mathrm{hom}_{2+i}$, donc est une similitude de même rapport et angle et de centre l'image de celui de $d \circ g$ par ce qui conjugue (ici d^{-1}), à savoir

$$3\left(\frac{5-4\sqrt{3}}{7} + \frac{1+6\sqrt{3}}{7}i\right) + (1-3)(2+i) = \frac{-12\sqrt{3}-13}{7} + \frac{18\sqrt{3}-11}{7}i.$$

2.5 $k \circ l$ et $l \circ k$

$3\overline{z} - 4(1+5i)$

On a $k(l(z)) = k(3\overline{z} - 4(1+5i)) = \frac{3-4i}{5}\overline{(3\overline{z} - 4(1+5i))} + 2\frac{11i-7}{5} = 3\frac{3-4i}{5}z + 2\frac{27+49i}{5}$, on reconnaît une similitude de rapport $\left|3\frac{3-4i}{5}\right| = 3$ et d'angle $\arg\left(3\frac{3-4i}{5}\right) = \operatorname{atn}\left(-\frac{4}{3}\right)$. Son centre ω est comme d'habitude donné par l'équation des points fixes $\omega = \frac{\beta}{1-\alpha} = \frac{2\frac{27+49i}{5}}{1-3\frac{3-4i}{5}} = 6 - \frac{13}{2}i$.

On a $l(k(z)) = l\left(\frac{3-4i}{5}\overline{z} + 2\frac{11i-7}{5}\right) = 3\overline{\left(\frac{3-4i}{5}\overline{z} + 2\frac{11i-7}{5}\right)} - 4(1+5i) = 3\frac{3+4i}{5}z - 2\frac{31+83i}{5}$, on reconnaît encore une similitude de rapport $\left|3\frac{3+4i}{5}\right| = 3$ mais cette fois d'angle $\arg\left(3\frac{3+4i}{5}\right) = \operatorname{atn}\frac{4}{3}$. Son centre vaut $\frac{\beta}{1-\alpha} = \frac{-2\frac{31+83i}{5}}{1-3\frac{3+4i}{5}} = 14 - \frac{1}{2}i$.

(a) **Composée de deux réflexions d'axes Δ et Δ'.**

Soient $\frac{\theta}{2}$ et $\frac{\theta'}{2}$ les angles faits par Δ et Δ' avec $\mathbf{R}$. Le cours donne une écriture complexe $\begin{cases} \mathrm{ref}^{\Delta} = e^{i\theta}\overline{\mathrm{Id}} + \beta \\ \mathrm{ref}^{\Delta'} = e^{i\theta'}\overline{\mathrm{Id}} + \beta' \end{cases}$ pour certains complexes β et β', d'où la composée

$$\mathrm{ref}^{\Delta'} \circ \mathrm{ref}^{\Delta} = \left[e^{i\theta'}\overline{\mathrm{Id}} + \beta'\right] \circ \left[e^{i\theta}\overline{\mathrm{Id}} + \beta\right] = e^{i\theta'}\overline{\left(e^{i\theta}\overline{\mathrm{Id}} + \beta\right)} + \beta' = e^{i\left(\theta'-\theta\right)}\operatorname{Id} + \beta' + e^{i\theta'}\overline{\beta}.$$

Si $\theta \neq \theta\ [2\pi]$, on obtient une rotation d'angle $\theta' - \theta = \widehat{\Delta\Delta'}$. L'intersection des axes est fixe par chacune des deux réflexions, donc par leur composée, d'où le centre de la rotation cherchée.
Si $\theta = \theta'\ [2\pi]$, *i. e.* si les axes Δ et Δ' sont parallèles, on obtient une translation de vecteur $\beta' + e^{i\theta'}\overline{\beta}$.
Sanity check : le cours permet de préciser $\beta = \left(1 - e^{i\theta}\right)\omega$ pour tout *réel*[2] ω sur l'axe, ce qui montre dans le cas $\theta = \theta'$ que les vecteurs des deux composées sont opposés :

$$\begin{aligned} \left(\beta' + e^{i\theta'}\overline{\beta}\right) + \left(\beta + e^{i\theta}\overline{\beta'}\right) &= \left(\beta + \beta'\right) + e^{i\theta}\overline{\left(\beta + \beta'\right)} \\ &= \left(1 - e^{i\theta}\right)\left(\omega + \omega'\right) + e^{i\theta}\overline{\left(1 - e^{i\theta}\right)\left(\omega + \omega'\right)} \\ &= \left(1 - e^{i\theta}\right)\left(\omega + \omega'\right) + \left(e^{i\theta} - 1\right)\left(\omega + \omega'\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

(b) **Composée de deux rotations.**

Soient θ et θ' les angles des rotations considérées. Le cours donne des écritures complexes $\begin{cases} \operatorname{rot}_{\Omega}^{\theta} = e^{i\theta}\operatorname{Id} + \beta \\ \operatorname{rot}_{\Omega'}^{\theta'} = e^{i\theta'}\operatorname{Id} + \beta' \end{cases}$ pour certains complexes β et β', d'où la composée

$$\operatorname{rot}_{\Omega'}^{\theta'} \circ \operatorname{rot}_{\Omega}^{\theta} = \left[e^{i\theta'}\operatorname{Id} + \beta'\right] \circ \left[e^{i\theta}\operatorname{Id} + \beta\right] = e^{i\theta'}\left(e^{i\theta}\operatorname{Id} + \beta\right) + \beta' = e^{i\left(\theta + \theta'\right)}\operatorname{Id} + Cste.$$

On reconnaît une rotation d'angle $\theta + \theta'$ dans le cas où ce dernier est non nul *modulo* 2π ; dans le cas contraire, on obtient une translation $\operatorname{Id} + Cste$.

(c) **Composée d'une rotation par une translation.**

Soit θ l'angle de la rotation et u le vecteur de la translation considérées. Le cours donne des écritures complexes $\begin{cases} \operatorname{rot}_{\Omega}^{\theta} = e^{i\theta}\operatorname{Id} + \beta \\ t_u = \operatorname{Id} + u \end{cases}$ pour un certain complexe β, d'où les composées

$$t_u \circ \operatorname{rot}_{\Omega}^{\theta} = e^{i\theta}\operatorname{Id} + (\beta + u) \text{ et } \operatorname{rot}_{\Omega}^{\theta} \circ t_u = e^{i\theta}\operatorname{Id} + \left(e^{i\theta}u + \beta\right).$$

On reconnaît une rotation de même angle θ (sauf si $\theta = 0\ [2\pi]$, ce qui équivaut à $\operatorname{rot}_{\Omega}^{\theta} = \operatorname{Id}$ et à $\beta = 0$: on retrouve alors la translation $\operatorname{Id} + u$).

(d) **Composée de deux homothéties.**

Soient λ et λ' les rapports des homothéties considérées. Le cours donne des écritures complexes $\begin{cases} {}^{\lambda}\operatorname{hom}_{\Omega} = \lambda\operatorname{Id} + \beta \\ {}^{\lambda'}\operatorname{hom}_{\Omega'} = \lambda'\operatorname{Id} + \beta' \end{cases}$ pour certains complexes β et β', d'où la composée

$${}^{\lambda'}\operatorname{hom}_{\Omega'} \circ {}^{\lambda}\operatorname{hom}_{\Omega} = \left[\lambda'\operatorname{Id} + \beta'\right] \circ \left[\lambda\operatorname{Id} + \beta\right] = \lambda\lambda'\operatorname{Id} + \left(\lambda'\beta + \beta'\right).$$

Si $\lambda\lambda' = 1$, on reconnaît une translation, sinon on reconnaît une homothétie de rapport $\lambda\lambda'$. Bien plus concis que la démonstration géométrique, n'est-ce pas ?

(e) **Composée d'une homothétie par une translation.**

Soit λ le rapport de l'homothétie et u le vecteur de la translation considérées. Le cours donne des écritures complexes $\begin{cases} {}^{\lambda}\operatorname{hom}_{\Omega} = \lambda\operatorname{Id} + \beta \\ t_u = \operatorname{Id} + u \end{cases}$ pour un certain complexe β, d'où les composées

$$t_u \circ {}^{\lambda}\operatorname{hom}_{\Omega} = \lambda\operatorname{Id} + (\beta + u) \text{ et } {}^{\lambda}\operatorname{hom}_{\Omega} \circ t_u = \lambda\operatorname{Id} + (\lambda u + \beta).$$

On reconnaît une homothétie de même rapport λ(sauf si $\lambda = 1$, ce qui équivaut à ${}^{\lambda}\operatorname{hom}_{\Omega} = \operatorname{Id}$ et à $\beta = 0$: on retrouve alors la translation $\operatorname{Id} + u$).

(f) Pour toutes les autres composées, nous laissons le lecteur s'inspirer des exemples précédents (ainsi que du premier exercice pour la lecture géométrique de la composée écrite en complexe).

3. Afin d'utiliser le critère du cours, on va exprimer le centre de gravité d'un triangle comme l'image par une similitude.

Soit PQR un triangle équilatéral direct dont on note G le centre de gravité et P' le milieu de QR. On a donc $G = \frac{1}{3}P + \frac{1}{3}Q + \frac{1}{3}R = \frac{1}{3}P + \frac{2}{3}\frac{Q+R}{2} = \frac{1}{3}P + \frac{2}{3}M$, d'où la longueur

$$PG = \|P - G\| = \left\|P - \left(\frac{1}{3}P + \frac{2}{3}M\right)\right\| = \left\|\frac{2}{3}P - \frac{2}{3}M\right\| = \frac{2}{3}PM = \frac{2}{3}PQ\cos\frac{\pi}{6} = \frac{PQ}{\sqrt{3}}.$$

[2] cela suppose que l'axe rencontre $\mathbf{R}$, on supposera donc $\theta \neq 0$ dans ce sanity check

Ainsi, le centre de gravité G s'obtient en appliquant sur Q une similitude de centre P, rapport $\frac{1}{\sqrt{3}}$ et angle $\frac{\pi}{6}$.

Notons A', B' et C' les centres de gravités des triangles équilatéraux de bases respectives $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$. Le problème ne dépendant pas de l'étiquetage des sommets A, B, C, on peut toujours supposer ABC direct (quitte à échanger A et B). Alors ce qui précède permet d'affirmer $A' = {}^{1/\sqrt{3}}\mathrm{sim}_C^{\frac{\pi}{6}}(B)$, ce qui s'écrit en complexes $a' = \lambda b + (1-\lambda)c$ avec $\lambda := \frac{e^{i\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{3}}$. On en déduit la somme

$$\begin{aligned} a' + jb' + j^2c' &= [\lambda b + (1-\lambda)c] + j[\lambda c + (1-\lambda)a] + j^2[\lambda a + (1-\lambda)b] \\ &= a\left[j(1-\lambda) + j^2\lambda\right] + b\left[\lambda + j^2(1-\lambda)\right] + c[(1-\lambda) + \lambda j]. \end{aligned}$$

En factorisant/divisant par j, on voit que les trois coefficients en a, b et c sont des multiples de

$$1 + (j-1)\lambda = 1 + \left(-\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2\sqrt{3}}\right) = 0,$$

de sorte que la somme $a' + jb' + j^2c'$ est nulle, *c. q. f. d.*.

4. Le problème étant invariant par homothétie de centre O, on peut imposer $OA = 1$. Le problème étant de plus invariant par rotation autour de O, on peut imposer $A = 1$. Alors B est un complexe unitaire, mettons $B = e^{i\theta}$. Notons t la distance AT, de sorte que $T = 1 + it$. Alors $U = \mathrm{rot}_O^\theta(T) = e^{i\theta}(1+it)$, d'où le milieu de $[TU]$ (appelons-le M) $M = \frac{T+U}{2} = (1+it)\frac{1+e^{i\theta}}{2}$. Pour vérifier que (AB) recoupe (UT) en M, il suffit de vérifier que les points A, B et M sont alignés. On regarde pour cela la nullité du déterminant

$$\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}\right) = \mathrm{Im}\left[\overline{(B-A)}(M-A)\right] \;;$$

le crochet vaut

$$\begin{aligned} \left(e^{-i\theta} - 1\right)\left(\frac{1+e^{i\theta}}{2}(1+it) - 1\right) &= e^{-i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}\left(\frac{e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}}{2}(1+it) - e^{i\frac{\theta}{2}}\right) \\ &= -2i\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}(1+it) - \left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right)\right) \;; \end{aligned}$$

la parenthèse est de partie réelle nulle, donc le produit par $-2i\sin\frac{\theta}{2}$ est de partie imaginaire nulle, *c. q. f. d.*.