Transformations géométriques

(T. G. 4)

1. Déterminer l'expression complexe de chacune des transformations suivantes
   (a) la translation de vecteur $2-i$;
   (b) la rotation de centre 1 et d'angle $\frac{\pi}{2}$;
   (c) la rotation de centre 3 et d'angle $\frac{\pi}{6}$;
   (d) l'homothétie de centre $2+i$ et de rapport $\frac{1}{3}$;
   (e) l'homothétie de centre $-i$ et de rapport 3 ;
   (f) la similitude de centre 0, rapport 18 et angle 42 ;
   (g) la similitude de centre $-1-i$, rapport 2 et angle $\frac{\pi}{3}$;
   (h) la réflexion d'axe la seconde bissectrice ;
   (i) la réflexion d'axe d'équation $y=2x+3$;
   (j) la réflexion glissée d'axe $i\mathbf{R}+2$ et de vecteur -3 ;
   (k) la réflexion glissée d'axe d'équation $2y+x=3$ et de vecteur $-4+2i$;
   (l) la similitude indirecte d'axe $\mathbf{R}-5i$, centre $2-5i$ et rapport 3 ;
   (m) la similitude indirecte d'axe d'équation $3y+x=2$, centre $-1+i$ et rapport 4.
2. Déterminer la composée de deux quelconques des transformations ci-dessus (expression complexe *et* sens géométrique) jusqu'à se sentir à l'aise.
3. Retrouver à l'aide des complexes les composées de quasi–isométrées obtenues dans le cours par des méthodes géométriques puis décrire la composée de *n'importe quelle* paire de quasi-isométries.
4. (théorème dit "de Napoléon") Soit ABC un triangle. On construit sur chaque côté un triangle équilatéral dont le troisième sommet est extérieur à ABC. Montrer que les centres de gravité de ces trois triangles équilatéraux forment un triangle équilatéral.
5. Soit un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et $[AT]$ une tangente à C en A. On note B et U les images de A et T par $\mathrm{rot}_O^{\frac{17\pi}{42}}$. Montrer que la droite (AB) recoupe le segment $[TU]$ en son milieu.
6. Montrer que l'on a des sous-groupes emboités (pour des transformations de *même* centre)

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & \nearrow & \{\text{rotations}\} & \searrow & & & \\ \{\mathrm{Id}\} & \longrightarrow & \{\mathrm{Id},-\mathrm{Id}\} & & & & \left\{\begin{array}{c}\text{similitudes}\\ \text{directes}\end{array}\right\} & \longrightarrow & \{\text{similitudes}\} \\ & & & \searrow & \{\text{homothéties}\} & \nearrow & & & \end{array}$$

   (il s'agit donc de montrer, pour chaque flèche $G \longrightarrow H$ du diagramme ci-dessus, que G est inclus dans H et est un sous-groupe de $\mathfrak{S}$).
7. Montrer qu'une translation se décompose comme produit de deux rotations dont on peut imposer l'une. En déduire une autre manière que celle du cours pour décrire la composée d'une translation par une rotation.
8. Montrer que toute isométrie du plan est la composée d'au plus deux réflexions par au plus un translation.z
9. Décrire les transformations φ du plan telles que $\varphi \circ t_u \circ \varphi^{-1} = t_{\varphi(u)}$ pour tout vecteur u.
10. Décrire les transformations φ du plan telles que $\varphi \circ \mathrm{ref}^{\Delta} \circ \varphi^{-1} = \mathrm{ref}^{\varphi(\Delta)}$ pour toute droite Δ.
11. Montrer la bijectivité de $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbf{C}^* \times \mathbf{C} \times \{\pm 1\} & \widetilde{\longrightarrow} & \begin{array}{c}\text{ensemble des quasi-}\\ \text{isométries du plan}\end{array} \\ (\alpha,\beta,\varepsilon) & \longmapsto & \left\{\begin{array}{l} \alpha\,\mathrm{Id}+\beta \text{ si } \varepsilon=1 \\ \alpha\overline{\mathrm{Id}}+\beta \text{ si } \varepsilon=-1 \end{array}\right. \end{array}\right.$ et exhiber la réciproque.