Langage fonctionnel

(T. G. 3)

Solution proposée.

1. (a) Tout être humain possède une mère biologique et une seule, la correspondance est donc fonctionnelle et est une application. Elle n'est pas injective car de nombreuses mères ont eu *plusieurs* enfants. Son image est l'ensemble des femmes qui ont eu au moins un enfant.

   (b) De nombreuses personnes ont *plusieurs* cousins, donc la correspondance n'est pas fonctionnelle.

   (c) Un couple n'a pas nécessairement des enfants (donc la corresponcance ne peut être une application) mais, s'il en a, il y a un premier né et un seul. La corresponance est donc fonctionnelle. Un ainé provenant par ailleurs d'un couple de parents et d'un seul, la correspondance est injective. Son image est l'ensemble des ainés.

   (d) Il faut préciser le contexte (un interro *fixée*) sans quoi la correspondance n'a pas de sens. Certains élèves pouvant être absents, la correspondance ne peut ête une application. Elle est fonctionnelle car une copie a toujours une seule note. Elle n'est pas injective car tous les élèves ont la même note (maximale) vu qu'ils apprennent toujours leur cours.

   (e) Préciser le contexte : une boulangerie *fixée*, un croissant *avec* ou *sans* beurre, un croissant *en vente*, un moment *fixé* de la journée. Tout article en vente ayant un prix (et un seul !), la correspondance est une appplication. Puisque tous les croissants ont même prix (sauf croissant de la veille ou autre exception), la correspondance n'est pas injective (sauf s'il ne reste pas plus d'un croissant !) et son image est un singleton.

   (f) Toute flèche a une extrémité bien définie, donc la corresponce est une application. Elle n'est pas injective puisque un même point peut être l'extrémité d'une infinité de flèches différentes. Son image est l'ensemble de tous les points du plan / de l'espace.

   (g) Un vecteur ayant été défini comme une flèche dont on a *oublié l'orgine*, la correspondance n'est définie nulle part.

   (h) Deux flèches distinctes représentant un même vecteur ont des origines *distinctes*, donc la correspondance n'est pas fonctionnelle.

   (i) La norme *ne dépend pas* du représentant choisi (et existe toujours), donc la correspondance est une application. Elle n'est pas injective puisqu'on peut changer la direction ou le sens d'un vecteur sans changer sa norme.

   (j) Une droite donné peut rencontrer le cercle considérer en *deux* points, donc la correspondance n'est pas fonctionnelle.

   (k) Une tangente donnée touche le cercle donné en *exactement* un point, la correspondance est donc une application. Par ailleurs, par tout point du cercle considéré on peut mener une tangente (et *une seule*), donc la correspondance est injective (d'image tout le cercle).

   (l) Comme ci-dessus, la correspondance est une application. Mais cette fois un point sur la sphère possède une *infinité* de tangentes (toutes incluse dans un unique plan tangent) donc la correspondance n'est pas injective. Son image est toute la sphère.

   (m) *La* direction d'une droite est bien définie, la correspondance est donc une application. Elle n'est pas injective car des droites parallèles (et on peut en chosir *une infinité*) ont toute même direction.

   (n) Laquelle orientation ? Même si le plan est orienté, *i. e.* si ses cercles sont orientés dans le même sens, comment orienter une lemniscate ∞ ? La correspondance n'est donc pas fonctionnelle.

   (o) La correspondance est fonctionnelle ssi toute droite ne coupe le graphe de la fonction donnée (appelons-la f) qu'en *au plus* un point, c'est-à-dire ssi f est injective. Dans ce cas, la correspondance est injective (car f est fonctionnelle) et est une application ssi f est surjective. Son image est toute la source de f.

   (p) Lequel ? Penser à sin qui s'annule sur tout $\pi\mathbf{Z}$. La correspondance n'est donc pas fonctionnelle.

(q) La dérivée en un point est la *limite* d'un taux d'accroissement ; elle peut donc ne pas exister mais est unique dans le cas contraire. La dérivée est donc une fonction, ce qui montre que la correspondance est une application. Deux fonctions ayant par ailleurs même dérivée ssi elles diffèrent d'une constante (qui peut être *non nulle*), la correspondance n'est pas injective. Il est en revanche beaucoup plus difficile de comprendre son image (*i. e.* de décrire l'ensemble des fonctions dérivées).

(r) Une fonction donnée pouvant ne pas être définie en un objet source donné, la correspondance n'est pas une application. Mais l'unicité de l'image par une fonction nous assure que la correspondance est fonctionnelle. Elle est surjective car, étant donné un objet but, on peut toujours définir *au moins une* fonction qui envoie un objet source donné sur cet objet but (qu'importe le reste).

(s) Par unicité de la limite, la correspondance est fonctionnelle. Mais ce n'est pas une application car la fonction $\lfloor\cdot\rfloor$ n'a pas de limite en 42 (elle en a une à droite (42) et une à gauche (41) qui diffèrent).

2. On se ramène à des fonctions de référence en composant par des applications affines, pour lesquelles l'effet sur un graphe est connu (translation, réflexion, affinité).

(a) $2\,\mathrm{Id}-3$ peut se décomposer comme suit : $x \overset{2\,\mathrm{Id}}{\longmapsto} 2x \overset{\mathrm{Id}-3}{\longmapsto} 2x-3$. Pour construire son graphe, on part donc de celui de Id (la première bissectrice), on lui applique une affinité d'axe celui des abscisses et de rapport 2 puis on le translate verticalement de -3. On aurait pu décomposer d'une autre manière ($x \overset{\mathrm{Id}-\frac{3}{2}}{\longmapsto} x-\frac{3}{2} \overset{2\,\mathrm{Id}}{\longmapsto} 2x-3$) ce qui nous aurait conduits à d'abord translater verticalement de $-\frac{3}{2}$ puis appliquer l'affinité précédente.

On se ramène à la fonction inverse en factorisant le dénominateur au numérateur :

$$\frac{\mathrm{Id}+2}{2\,\mathrm{Id}+1}=\frac{\frac{1}{2}\left(2\,\mathrm{Id}+1\right)+\frac{3}{2}}{2\,\mathrm{Id}+1}=\frac{1}{2}+\frac{3/2}{2\,\mathrm{Id}+1}.$$

Cela mène à la décomposition $\frac{\mathrm{Id}+2}{2\,\mathrm{Id}+1}:\gamma \overset{\frac{1}{2\,\mathrm{Id}+1}}{\longmapsto} \frac{1}{2\gamma+1} \overset{3\,\mathrm{Id}/2}{\longmapsto} \frac{3/2}{2\gamma+1} \overset{\mathrm{Id}+\frac{1}{2}}{\longmapsto} \frac{1}{2}+\frac{3/2}{2\,\mathrm{Id}+1}$. Le graphe de $\frac{\mathrm{Id}+2}{2\,\mathrm{Id}+1}=\left[\mathrm{Id}+\frac{1}{2}\right]\circ\left[3\,\mathrm{Id}/2\right]\circ\frac{1}{2\,\mathrm{Id}+1}$s'obtient par conséquent à partir du graphe de $\frac{1}{2\,\mathrm{Id}+1}$ en appliquant une affinité d'axe $\mathbf{R}$ et de rapport $\frac{3}{2}$ puis une translation vecticale de $+\frac{1}{2}$. Pour obtenir le graphe de $\frac{1}{2\,\mathrm{Id}+1}$, il faut faire attention au sens des opérations : d'après la factorisation $\frac{1}{2\,\mathrm{Id}+1}=\frac{1}{\mathrm{Id}}\circ\left[2\,\mathrm{Id}\right]\circ\left[\mathrm{Id}+\frac{1}{2}\right]$ (vérifier qu'elles coïncident en tout réel), on part du graphe de $\frac{1}{\mathrm{Id}}$ (une hyperbole), on applique une affinité d'axe $i\mathbf{R}$ et de rapport $\frac{1}{2}$ (et non 2) puis une translation horizontale de $-\frac{1}{2}$ (et non $\frac{1}{2}$) (bien vérifier que le graphe ainsi obtenu possède une asymptote en $-\frac{1}{2}$ comme celui de $\frac{1}{2\,\mathrm{Id}+1}$).

Même méthode pour $\frac{5\,\mathrm{Id}+7}{3-\mathrm{Id}}=\frac{-5(3-\mathrm{Id})+22}{3-\mathrm{Id}}=-5+\frac{22}{3-\mathrm{Id}}$ que l'on décomposerait en

$$\frac{5\,\mathrm{Id}+7}{3-\mathrm{Id}}=\left[\mathrm{Id}-5\right]\circ\left[22\,\mathrm{Id}\right]\circ\frac{1}{\mathrm{Id}}\circ\left[\mathrm{Id}+3\right]\circ\left[-\mathrm{Id}\right]\ :$$

on part du graphe de $\frac{1}{\mathrm{Id}}$, on applique une translation horizontale de -3, une affinité d'axe $i\mathbf{R}$ et de rapport $\frac{1}{-1}=-1$ (*i. e.* une réflexion d'axe $i\mathbf{R}$) (bien vérifier qu'on obtient une asymtotique verticale en 3 comme pour le graphe de $\frac{1}{3-\mathrm{Id}}$), une affinité d'axe $\mathbf{R}$ et de rapport 22 puis une translation verticale de -5. On aurait également pu factoriser d'une autre manière selon

$$\frac{5\,\mathrm{Id}+7}{3-\mathrm{Id}}=\left[22\,\mathrm{Id}\right]\circ\left[\mathrm{Id}-\frac{5}{22}\right]\circ\frac{1}{\mathrm{Id}}\circ\left[-\mathrm{Id}\right]\circ\left[\mathrm{Id}-3\right],$$

ce qui nous aurait conduit à partir du graphe de $\frac{1}{\mathrm{Id}}$, appliquer une translation horizontale de $-(-3)=3$, une réflexion d'axe $i\mathbf{R}$, une translation verticale de $-\frac{5}{22}$ puis une affinité d'axe $\mathbf{R}$ et de rapport 22.

(b) Afin de se ramener à une parabole, on se ramène à la forme canonique des trinômes du second degré. À σ réel fixé on peut écrire

$2\sigma^2-4\sigma+1=2\left(\sigma^2-2\sigma\right)+1=2\left(\sigma-1\right)^2-1$, ce qui peut s'écrire

$t \overset{\mathrm{Id}-1}{\longmapsto} t-1 \overset{\mathrm{Id}^{\times 2}}{\longmapsto} (t-1)^2 \overset{2\,\mathrm{Id}}{\longmapsto} 2\,(t-1)^2 \overset{\mathrm{Id}-1}{\longmapsto} 2\,(t-1)^2-1$, ce qui revient à factoriser

$2\,\mathrm{Id}^{\times 2}-4\,\mathrm{Id}+1=\left[\mathrm{Id}-1\right]\circ\left[2\,\mathrm{Id}\right]\circ\left[\mathrm{Id}^{\times 2}\right]\circ\left[\mathrm{Id}-1\right].$

On part donc du graphe de $\mathrm{Id}^{\times 2}$ (une parabole), on la translate horizontalement de $-(-1)=1$, on lui appliquer une affinité d'axe $\mathbf{R}$ et de rapport 2 puis une translation verticale de -1.

En écrivant de même (à χ réel fixe) $3\chi - \chi^2 + 1 = 1 - \left(\chi^2 - 2\frac{3\chi}{2}\right) = \frac{13}{4} - \left(\chi - \frac{3}{2}\right)^2$, on obtient la factorisation

$$3\,\mathrm{Id} - \mathrm{Id}^{\times 2} + 1 = \left[\mathrm{Id} + \frac{13}{4}\right] \circ [-\,\mathrm{Id}] \circ \left[\mathrm{Id}^{\times 2}\right] \circ \left[\mathrm{Id} - \frac{3}{2}\right],$$

d'où une construction du graphe cherché : partir de celui de $\mathrm{Id}^{\times 2}$, le translater horizontalement de $-\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}$, lui appliquer une réflexion d'axe $\mathbf{R}$ puis une translation verticale de $\frac{13}{4}$.

(c) On factorise $|5\,\mathrm{Id} - 2| = |\cdot| \circ [\mathrm{Id} - 2] \circ [5\,\mathrm{Id}]$ pour construire son graphe ; partir de celui de $|\cdot|$, lui appliquer une affinté d'axe $i\mathbf{R}$ et de rapport $\frac{1}{5}$ puis une translation horizontale de $-(-2)$. Autre possibilité en écrivant $|5\,\mathrm{Id} - 2| = |\cdot| \circ [5\,\mathrm{Id}] \circ \left[\mathrm{Id} - \frac{2}{5}\right]$. Bien vérifier dans les deux cas la présence d'un point anguleux d'abscisse $\frac{2}{5}$.

On factorise $4 - \left|\frac{\mathrm{Id}}{3} - 1\right| = [\mathrm{Id} + 4] \circ [-\,\mathrm{Id}] \circ |\cdot| \circ [\mathrm{Id} - 1] \circ \left[\frac{\mathrm{Id}}{3}\right]$: partir du graphe de $|\cdot|$, appliquer une affinité d'axe $i\mathbf{R}$ et de rapport $\frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$, translater horizontalement de $-(-1) = 1$, appliquer une réflexion d'axe $\mathbf{R}$ puis une translation verticale de 4.

Il convient de discuter selon la valeur de l'argument. Les deux points annulant les valeurs absolues sont ici -3 et $\frac{1}{2}$. On discute donc de la valeur de $|a+3| - |2a-1|$ selon la position d'un réel donné a par rapport à -3 et $\frac{1}{2}$. Pour $a \leq -3$, on obtient $-(a+3) - (-(2a-1)) = a - 4$; pour $-3 \leq a \leq \frac{1}{2}$, on obtient $(a+3) - (-(2a-1)) = 3a + 2$ (vérifier la coïncidence avec l'expression précédente à la valeur frontière -3) ; pour $a \geq \frac{1}{2}$, on trouve $(a+3) - (2a-1) = -a + 4$ (vérifier la coïncidence avec l'expression précédente à la valeur frontière $\frac{1}{2}$). Le graphe cherché s'obtient donc en juxtaposant les graphes des applications $\mathrm{Id} - 4$ restreinte à $]-\infty, -3]$, $3\,\mathrm{Id} + 2$ restreinte à $\left[-3, \frac{1}{2}\right]$ et $-\,\mathrm{Id} + 4$ restreinte à $\left[\frac{1}{2}, \infty\right[$.

(d) L'application $\left\lfloor \frac{\cdot}{2} \right\rfloor = \lfloor\cdot\rfloor \circ \frac{\mathrm{Id}}{2}$ a pour graphe celui de $\lfloor\cdot\rfloor$ sur lequel on a appliqué une affinité d'axe $i\mathbf{R}$ et de rapport $\frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$.

Le graphe de $\sqrt{\frac{\cdot}{3} - 5} = \sqrt{\cdot} \circ [\mathrm{Id} - 5] \circ \left[\frac{\mathrm{Id}}{3}\right]$ s'obtient à partir de celui de $\sqrt{\cdot}$ en appliquant une affinité d'axe $i\mathbf{R}$ et de rapport $\frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$ puis une translation horizontale de $-(-5) = 5$.

Le graphe de $\frac{3}{2}\sqrt{\frac{\cdot}{2} + 3} = \left[\frac{3}{2}\,\mathrm{Id}\right] \circ \sqrt{\cdot} \circ [\mathrm{Id} + 3] \circ \left[\frac{\mathrm{Id}}{2}\right]$ s'obtient à partir de celui de $\sqrt{\cdot}$ en appliquant une affinité d'axe $i\mathbf{R}$ et de rapport $\frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$, une translation horizontale de -3 puis une affinité d'axe $\mathbf{R}$ et de rapport $\frac{3}{2}$.

(e) Le graphe de $3\cos(2\cdot) = [3\,\mathrm{Id}] \circ \cos[2\cdot]$ s'obtient à partir de celui de cos en appliquant une affinité d'axe $i\mathbf{R}$ et de rapport $\frac{1}{2}$ puis une affinité d'axe $\mathbf{R}$ et de rapport 3.

Le graphe de $\tan\left(2\,\mathrm{Id} - \frac{\pi}{4}\right) = \tan \circ \left[\mathrm{Id} - \frac{\pi}{4}\right] \circ [2\,\mathrm{Id}]$ s'obtient à partir de celui de tan en appliquant une affinité d'axe $i\mathbf{R}$ et de rapport $\frac{1}{2}$ puis une translation horizontale de $-\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$.

3. Rappelons que la composée de deux applications $g \circ f$ est une application ssi l'image de f est incluse dans la source de g (ce qui est le cas pour deux applications $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$).

(a) La composée $[2, \infty[\xrightarrow{f} \mathbf{R} \xrightarrow{g} \mathbf{R}$ fait sens et envoie un réel $a \geq 2$ sur $g(f(a)) = f(a)^2 + 4 = (a-2) + 4 = a + 2$, ce qui équivaut à l'égalité $g \circ f = \mathrm{Id} + 2$.

L'image de g étant incluse dans $[4, \infty[$ (on a toujours $b^2 + 4 \geq 4$ pour b réel), *a fortiori* dans la source de f, la composée $f \circ g$ fait sens et envoie un réel b sur $f(g(b)) = f\left(b^2 + 4\right) = \sqrt{b^2 + 2}$, ce que l'on pourrait écrire $f \circ g = \sqrt{\mathrm{Id}^{\times 2} + 2}$.

(b) La seule image de f pouvant éventuellement ne pas être dans la source de g est 3 : regardons (pour un $\sigma \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$) à quelle condition $f(\sigma) = 3$. Cela équivaut successivement à $\frac{2\sigma+3}{\sigma-1} = 3 \iff 2\sigma + 3 = 3\sigma - 3 \iff 6 = \sigma$. La composée $g \circ f$ est donc définie sur $\mathbf{R} \setminus \{1, 3\}$ et envoie un réel σ sur $g(f(\sigma)) = \frac{f(\sigma)+1}{f(\sigma)-3} = \frac{\frac{2\sigma+3}{\sigma-1}+1}{\frac{2\sigma+3}{\sigma-1}-3} = \frac{(2\sigma+3)+\sigma-1}{(2\sigma+3)-3\sigma+3} = \frac{3\sigma+2}{6-\sigma}$.

La seule image de g pouvant éventuellement ne pas être dans la source de f est 1 : regardons (pour un $\tau \in \mathbf{R} \setminus \{3\}$) à quelle condition $g(\tau) = 1$. Cela équivaut successivement à $\frac{\tau+1}{\tau-3} = 1 \iff \tau + 1 = \tau - 3 \iff 4 = 0$. La composée $f \circ g$ est donc définie sur tout $\mathbf{R} \setminus \{3\}$ et envoie un réel τ sur $f(g(\tau)) = \frac{2\frac{\tau+1}{\tau-3}+1}{\frac{\tau+1}{\tau-3}-1} = \frac{2\tau 2+\tau-3}{\tau+1-\tau+3} = \frac{3\tau-1}{4}$.

(c) Les deux composées $\mathbf{N} \xrightarrow{f} \mathbf{Z} \xrightarrow{g} \mathbf{N}$ et $\mathbf{Z} \xrightarrow{g} \mathbf{N} \xrightarrow{f} \mathbf{Z}$ sont bien définies (bien vérifier que $g(\psi) \geq 0$ pour $\psi < 0$).

Calculons $g \circ f$. Fixons un entier $n \geq 0$: s'il est pair, alors $\frac{n}{2}$ est un entier positif, d'où l'on tire $g(f(n)) = g\left(\frac{n}{2}\right) = 2\frac{n}{2} = n$; si n est impair, alors $-\frac{n+1}{2}$ est un entier négatif et il vient $g(f(n)) = g\left(-\frac{n+1}{2}\right) = -2\left(-\frac{n+1}{2}\right) - 1 = n$. Nous avons donc montré que $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbf{N}}$.

Calculons $f \circ g$. Soit n dans $\mathbf{Z}$. S'il est positif, alors $2n$ est pair et il s'ensuit $f(g(n)) = f(2n) = \frac{2n}{2} = n$; si n est strictement négatif, alors $-2n-1$ est impair et l'on en déduit $f(g(n)) = f(-2n-1) = -\frac{(-2n-1)+1}{2} = n$. Nous avons ainsi prouvé que $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbf{Z}}$.

Conclusion : nous avons une correspondance bijective $\mathbf{N} \overset{f}{\underset{g}{\rightleftarrows}} \mathbf{Z}$.

4. Soient deux réels f et g tels que $2f - \sqrt{1+f^2} = 2g - \sqrt{1+g^2}$. Cela se réécrit

$$2(f-g) = \sqrt{1+f^2} - \sqrt{1+g^2} = \frac{(1+f^2)-(1+g^2)}{\sqrt{1+f^2}+\sqrt{1+g^2}} = \frac{(f-g)(f+g)}{\sqrt{1+f^2}+\sqrt{1+g^2}}.$$

Si on avait $f \neq g$, on pourrait simplifier par $f-g$ et l'on aurait alors (remarquer la comparaison $\sqrt{1+x^2} \geq \sqrt{0+x^2} = |x|$ valide pour tout réel x)

$$2 = \frac{f+g}{\sqrt{1+f^2}+\sqrt{1+g^2}} \leq \frac{|f|+|g|}{\underbrace{\sqrt{1+f^2}}_{\geq |f|} + \underbrace{\sqrt{1+g^2}}_{\geq |g|}} \leq \frac{|f|+|g|}{|f|+|g|} = 1, \text{ ce qui est absurde.}$$

D'où l'injectivité cherchée.

Pour expliciter la réciproque, on fixe un réel y (dans le but $\mathbf{R}$) et on résoud l'équation $2x - \sqrt{1+x^2} = y$ en l'inconnue x (on vient de montrer l'unicité de la solution). Soit donc x un tel réel : isoler la racine et élever au carré donné $(2x-y)^2 = 1+x^2$, ce qui équivaut après développement à $3x^2 - 4xy + y^2 - 1 = 0$. Le discriminant réduit de ce trinôme en x vaut $(2y)^2 - 3(y^2-1) = y^2+3$, d'où $x = \frac{2y \pm \sqrt{y^2+3}}{3}$. Pour trancher sur le signe, on remarque que l'équation de départ impose la positivité de $2x - y = \sqrt{1+x^2}$; or nous venons de montrer que $x - 2y = \frac{-y \pm \sqrt{y^2+3}}{3}$, ce qui impose de garder le signe $+$. Il en résulte que la seule solution (si il y en a !) à notre équation est nécessairement $x = \frac{\sqrt{y^2+3}-y}{3}$. Comment s'assurer réciproquement que ce x est bien solution de l'équation de départ ?

Pour ce faire, on repart depuis le début et on raisonne proprement par équivalences :

$$\begin{aligned} 2x - \sqrt{1+x^2} = y \quad &\iff \quad 2x - y = \sqrt{1+x^2} \iff \begin{cases} 2x - y \geq 0 \\ (2x-y)^2 = 1+x^2 \end{cases} \\ &\underset{\substack{\text{du trinôme} \\ \text{ci-dessus}}}{\overset{\text{résolution}}{\iff}} \begin{cases} 2x - y \geq 0 \\ x = \frac{2y \pm \sqrt{y^2+3}}{3} \end{cases} \iff x = \frac{\sqrt{y^2+3}-y}{3}. \end{aligned}$$

Il est bon de remarquer que la résolution de l'équation montre au passage l'injectivité voulue, ce qui nous épargne l'artisanat du premier paragraphe.

5. On utilise à bon escient la remarque ci-dessus. Fixons un réel c et un réel $a \geq 0$. On a les équivalences

$$\frac{e^a + e^{-a}}{2} = c \iff e^a + e^{-a} = 2c \iff (e^a)^2 - 2c(e^a) + 1 = 0.$$

Le trinôme $X^2 - 2cX + 1$ a pour discriminant réduit $c^2 - 1$, ce qui montre que l'équation ci-dessus a (au moins) une solution réelle ssi $|c| \geq 1$. Dans ce cas, on peut continuer à dérouler les équivalences :

$$\frac{e^a + e^{-a}}{2} = c \iff e^a = c \pm \sqrt{c^2-1}.$$

Pour trancher sur le signe, on se rappelle que $a \geq 0$, ce qui implique $e^a \geq 1$: montrons que la plus petite solution $c - \sqrt{c^2-1}$ est toujours ≤ 1 par l'absurde en déroulant les implications

$$\begin{aligned} c - \sqrt{c^2-1} > 1 \quad &\Longrightarrow \quad c - 1 > \sqrt{c^2-1} \geq 0 \Longrightarrow (c-1)^2 > \sqrt{c^2-1}^2 \\ &\Longrightarrow \quad c^2 - 2c + 1 > c^2 - 1 \Longrightarrow 2 > 2c \Longrightarrow c < 1 \overset{|c|\geq 1}{\Longrightarrow} c \leq -1 \\ &\Longrightarrow \quad c - \sqrt{c^2-1} \leq 0 \text{ (contredit l'hypothèse } c - \sqrt{c^2-1} > 1\text{).} \end{aligned}$$

Il en résulte que, toujours dans le cas $|c| \geq 1$, l'équation $\frac{e^a+e^{-a}}{2} = c$ équivaut à $e^a = c + \sqrt{c^2-1}$. Pour récupérer a, on veut appliquer ln, ce qui présupposer la positivité du membre de droite : c'est le cas lorsque $c \geq 1$ (puisqu'alors $c+\sqrt{c^2-1} \geq 1+0>0$) mais pas quand $c \leq 0$ (puisqu'alors $c+\sqrt{c^2-1} \leq \sqrt{c^2-0}-|c|=0$).

Conclusion : l'équation $\frac{e^a+e^{-a}}{2}=c$ a (au moins) une solution ssi $c \geq 1$ et dans ce cas elle admet pour unique solution $a=\ln\left(c+\sqrt{c^2-1}\right)$. En d'autres termes, l'application $a \mapsto \frac{e^a+e^{-a}}{2}$ est une bijection de $\mathbf{R}_+$ sur $[1,\infty[$ et a pour réciproque $c \mapsto \ln\left(c+\sqrt{c^2-1}\right)$.

On raisonne exactement de même pour l'équation $\frac{e^a-e^{-a}}{2}=s$ en l'inconnue a où le réel s est fixé. Elle équivaut à $(e^a)^2-2s(e^a)-1=0$, les racines du trinômes sont $e^a=s\pm\sqrt{s^2+1}$, la condition $e^a \geq 1$ force le signe $+$; le membre de droite est alors >0, d'où un unique solution $a=\ln\left(s+\sqrt{s^2+1}\right)$.

Conclusion : l'application $a \mapsto \frac{e^a+e^{-a}}{2}$ est une bijection de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$ et a pour réciproque $s \mapsto \ln\left(s+\sqrt{s^2+1}\right)$.

6. Rappelons les définitions de $\operatorname{asn}=\left(\sin_{|\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}\right)^{-1}$, $\operatorname{acs}=\left(\cos_{|[0,\pi]}\right)^{-1}$ et $\operatorname{atn}=\left(\tan_{|\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[}\right)^{-1}$.

On utilise la propriété $f\left(f^{-1}(b)\right)=b$ valide pour toute injection f et pour tout b dans $\operatorname{Im} f$: spécialiser respectivement f en $\sin_{|\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}$, $\cos_{|[0,\pi]}$ et $\tan_{|\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[}$ montre que les trois composées $\sin\circ\operatorname{asn}$, $\cos\circ\operatorname{acs}$ et $\tan\circ\operatorname{atn}$ valent l'identité (des ensembles respectifs $[-1,1]$, $[-1,1]$ et $\mathbf{R}$).

Pour déterminer $\cos\circ\operatorname{asn}$, on compose l'identité $\cos^2+\sin^2=1$ à droite par asn, ce qui donne $\cos^2\circ\operatorname{asn}=1-\operatorname{Id}^{\times 2}$ et $\cos\circ\operatorname{asn}=\pm\sqrt{1-\operatorname{Id}^{\times 2}}$; or asn a pour image $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ où la fonction cos est positive, ce qui montre que l'on peut choisir le signe $+$. On montrerait de même que $\sin\circ\operatorname{acs}=\sqrt{1-\operatorname{Id}^{\times 2}}$ puis, à l'aide de l'identité $1+\tan^2=\frac{1}{\cos^2}$, que les neuf composées cherchées s'expriment par le tableau suivant (les réels s, c et t sont pris respectivement dans $[-1,1]$, $[-1,1]$ et $\mathbf{R}$)

$\circlearrowright$	$\operatorname{asn} s$	$\operatorname{acs} c$	$\operatorname{atn} t$
sin	s	$\sqrt{1-c^2}$	$\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$
cos	$\sqrt{1-s^2}$	c	$\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$
tan	$\frac{s}{\sqrt{1-s^2}}$	$\frac{\sqrt{1-c^2}}{c}$	t

.

La propriété $f^{-1}(f(a))=a$ valide pour tout objet source a d'une injection f montre que les composées $\operatorname{asn}\circ\sin$, $\operatorname{acs}\circ\cos$ et $\operatorname{atn}\circ\tan$ valent l'identité SI on les restreint respectivement à $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, $[0,\pi]$ et $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. Or la parité et la 2π-périodicité de cos implique celles de $\operatorname{acs}\circ\cos$, ce qui montre que le graphe de $\operatorname{acs}\circ\cos$ s'obtient à partir de celui de $|\cdot|$ sur $[-\pi,\pi]$ par des translations horizontales de multiples de 2π (on obtient un signal triangulaire). On en déduit le graphe de $\operatorname{asn}\circ\sin=\frac{\pi}{2}-\operatorname{acs}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{Id}\right)$ en appliquant deux réflexions d'axes vertical/horizontal d'abscisse/ordonnée $\frac{\pi}{4}$, ce qui revient à appliquer une symétrie centrale de centre $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$. Enfin, la π-périodicité de tan implique celle de $\operatorname{atn}\circ\tan$, ce qui montre que le graphe de $\operatorname{atn}\circ\tan$ s'obtient en translatant celui de Id sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ horizontalement suivant des multiples de π (on obtient un signal de la forme $\cdots ///\cdots$).

7. Soient a,b,α,β quatre réels tels que $a\operatorname{Id}_{\mathbf{R}}+b=\alpha\operatorname{Id}_{\mathbf{R}}+\beta$. Cela s'écrit $\forall t\in\mathbf{R},\ at+b=\alpha t+\beta$. Spécialiser selon $t\leftarrow 0$ donne $b=\beta$ puis spécialiser selon $t\leftarrow 1$ donne $a=\alpha$. L'application $(\lambda,\mu)\mapsto\lambda\operatorname{Id}_{\mathbf{R}}+\mu$ est donc injective.

Soient $a,b,c,\alpha,\beta,\gamma$ six réels tels que $a\operatorname{Id}_{\mathbf{R}}^{\times 2}+b\operatorname{Id}_{\mathbf{R}}+c=\alpha\operatorname{Id}_{\mathbf{R}}^{\times 2}+\beta\operatorname{Id}_{\mathbf{R}}+\gamma$. Spécialiser en $t\leftarrow 0$ donne $c=\gamma$ puis spécialiser selon $t\leftarrow\pm 1$ donne $\left\{\begin{array}{l}a+b=\alpha+\beta\\ a-b=a-\beta\end{array}\right.$, d'où en sommant et soustrayant les égalités $\left\{\begin{array}{l}2a=2\alpha\\ 2b=2\beta\end{array}\right.$; il en résulte l'égalité des triplets $(a,b,c)=(\alpha,\beta,\gamma)$ et l'injectivité de l'application $(\lambda,\mu,\nu)\mapsto\lambda\operatorname{Id}_{\mathbf{R}}^{\times 2}+\mu\operatorname{Id}_{\mathbf{R}}+\nu$.

8. Supposons les deux composées égales. Fixons un réel $t\neq 0$ et regardons l'égalité des deux composées appliquées en t :

$$\begin{array}{rcl}
a\left(\alpha t^2+\beta t+\gamma\right)^2+b\left(\alpha t^2+\beta t+\gamma\right)+c & = & \alpha\left(at^2+bt+c\right)^2+\beta\left(at^2+bt+c\right)+\gamma \\
\Longleftrightarrow a\left(\begin{array}{c}\alpha^2t^4+\beta^2t^2+\gamma^2+\\ 2\alpha\beta t^3+2\alpha\gamma t^2+2\beta\gamma t\end{array}\right)+\begin{array}{c}b\alpha t^2+b\beta t\\ +b\gamma+c\end{array} & = & \alpha\left(\begin{array}{c}a^2t^4+b^2t^2+c^2+\\ 2abt^3+2bct+2act^2\end{array}\right)+\begin{array}{c}\beta at^2+\beta bt\\ +\beta c+\gamma\end{array} \\
\underset{\text{par } b\beta t}{\overset{\text{simplifier}}{\Longleftrightarrow}}\begin{array}{c}t^4\left(a\alpha^2\right)+t^3\left(2a\alpha\beta\right)\\ +t^2\left(a\beta^2+2a\alpha\gamma+b\alpha\right)\\ +t\left(2a\beta\gamma\right)+\left(a\gamma^2+b\gamma+c\right)\end{array} & = & \begin{array}{c}t^4\left(\alpha a^2\right)+t^3\left(2\alpha ab\right)\\ +t^2\left(\alpha b^2+2\alpha ac+\beta a\right)\\ +t\left(2\alpha bc\right)+\left(\alpha c^2+\beta c+\gamma\right)\end{array}
\end{array}.$$

Après division par t^4 et passage à la limite lorsque $t \longrightarrow \infty$, on obtient l'égalité $a\alpha^2 = \alpha a^2$ des coefficients en t^4 ; vu l'hypothèse $a\alpha \neq 0$, cette dernière égalité implique $a = \alpha$. Après simplification par $t^4 a^3$, l'égalité ci-dessus devient (toujours pour $t \neq 0$ fixé)

$$\begin{array}{c} t^3 \left(2a^2\beta\right) + t^2 \left(a\beta^2 + 2a^2\gamma + ba\right) \\ +t\left(2a\beta\gamma\right) + \left(a\gamma^2 + b\gamma + c\right) \end{array} = \begin{array}{c} t^3 \left(2a^2 b\right) + t^2 \left(ab^2 + 2a^2 c + \beta a\right) \\ +t\left(2abc\right) + \left(ac^2 + \beta c + \gamma\right) \end{array}.$$

Le même raisonnement (diviser par t^3 puis prendre la limite lorsque $t \longrightarrow \infty$) fournit l'égalité $2a^2\beta = 2a^2 b$ des coefficients en t^3, d'où l'on déduit $\beta = b$ (puisque a est non nul). En simplifiant par $t^3\left(2a^2b\right)$, l'égalité ci-dessus devient (toujours pour $t \neq 0$ fixé)

$$\begin{array}{c} t^2 \left(ab^2 + 2a^2\gamma + ba\right) \\ +t\left(2a\beta\gamma\right) + \left(a\gamma^2 + b\gamma + c\right) \end{array} = \begin{array}{c} t^2 \left(ab^2 + 2a^2 c + ba\right) \\ +t\left(2abc\right) + \left(ac^2 + \beta c + \gamma\right) \end{array}.$$

Diviser par t^2 et passer à la limite donne l'égalité $ab^2 + 2a^2\gamma + ba = ab^2 + 2a^2 c + ba$ des coefficients en t^2, d'où l'on tire $\gamma = a$ après simplification.

Finalement, si nos trinômes commutent, ils sont égaux. Réciproquement, il est clair qu'une application commute avec elle-même.

Conclusion : deux trinômes du second degré commutent ssi ils sont égaux.

9. L'application g est injective car $h \circ g$ l'est et est surjective car $g \circ f$ l'est, donc g est une bijection. Puisque $h \circ g$ et $g \circ f$ sont également bijectives, les composées $(h \circ g) \circ g^{-1} = h$ et $g^{-1} \circ (g \circ f) = f$ le sont également, ce qui conclut.

10. L'application f est injective car $(h \circ g) \circ f$ l'est et est surjective car $f \circ (g \circ h)$ l'est, donc est une bijection. La composée $h \circ g$ des injections $h \circ g \circ f$ et f^{-1} reste une injection, d'où l'injectivité de g ; de même, la composée $g \circ h$ des surjections f^{-1} et $f \circ g \circ h$ reste surjective, d'où la surjectivité de g. On en déduit que g est bijective et, par un raisonnement analogue ($g^{-1} \circ (g \circ h)$ surjective et $(h \circ g) \circ g^{-1}$ injective), que h est bijective, ce qui conlut.

11. Les hypothèses impliquent la surjectivité de s, l'injectivité de i et l'égalité $g \circ s = i \circ f$.

Supposons h trouvé comme dans l'énoncé. La commutativité du diagramme implique $h \circ s = f$, *i. e.* $\forall a \in A,\ h(s(a)) = f(a)$, ce qui impose la définition de h en tout $b \in B$: appliquer f sur un antécédent de b par s.

Revenons à la question. L'analyse ci-dessus prouve l'unicité de l'application cherchée et nous indique comment la construire : étant donné un $b \in B$, on définit $h(b)$ comme étant l'image par f d'un antécédent par s de b (il en existe car s est surjective). Il faut vérifier pourquoi cette définition est fonctionnelle, *i. e.* pourquoi l'image $f(a)$ d'un $b \in B$ ne dépend pas de l'antécédent a par s de b choisi. Soient a et α deux tels antécédents : on a $s(a) = b = s(\alpha)$. Appliquer g permet d'utiliser l'hypothèse $g \circ s = i \circ f$, ce qui donne $i(f(a)) = i(f(\alpha))$, d'où par injectivité de i l'égalité voulue $f(a) = f(\alpha)$.

Il reste à montrer que le h sus-construit fait commuter le diagramme souhaité, autrement dit que $h \circ s = f$ et que $i \circ h = g$. La première égalité découle de notre définition de h, la seconde du calcul suivant où b est fixé dans B et où a est un antécédent de b par s :

$$[i \circ h](b) = i(h(b)) = i(f(a)) = [i \circ f](a) \overset{g\circ s = i\circ f}{=} [g \circ s](a) = g(s(a)) = g(b).$$

12. Soient a et α dans A tels que $f(a) = f(\alpha)$. Si a et α appartiennent tous deux à E ou à F, alors l'injectivité de $f_{|E}$ ou de $f_{|F}$ permet de conclure $a = \alpha$. Dans le cas contraire, les images $f(a)$ et $f(\alpha)$ appartiennent pour l'une à $\operatorname{Im}\left(f_{|E}\right)$ et pour l'autre à $\operatorname{Im}\left(f_{|F}\right)$, ce qui est impossible puisque ces images sont par hypothèse disjointes.

Pour un contre-exemple, considérer la fonction $\mathrm{Id}_{\mathbf{R}}^{\times 2}$ et les parties $(E, F) := (\mathbf{R}_+, \mathbf{R}_-)$: elle n'est injective (car elle est paire) mais chacune des restrictions est injective (de réciproque $\sqrt{|\cdot|}$).

13. Observons qu'une bijection de $\mathbf{N}^*$ sur un ensemble consiste à *énumérer* les éléments de ce dernier : le premier sera l'image de 1, le deuxième sera l'image de 2, le troisième l'image de 3...

Pour mettre en bijection $\mathbf{N}$ et $\mathbf{N}^*$, il suffit de décaler le compage habituel de un pas. (Formellement, les applications $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbf{N} & \longrightarrow & \mathbf{N}^* \\ n & \longmapsto & n+1 \end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbf{N}^* & \longrightarrow & \mathbf{N} \\ n & \longmapsto & n-1 \end{array}\right.$ forment une correspondance bijective entre $\mathbf{N}$ et $\mathbf{N}^*$.)

Pour $\mathbf{Z}$, il suffit de lister les entiers négatifs en alternance avec les positifs : $0, -1, 1, -2, 2, -3, 3...$ (cela est fait formellement à l'exerice 3(c)).

Pour $\mathbf{N}^2$, on peut énumerer « en serpent » en ordonnant les couples $\binom{a}{b}$ d'abord selon la somme $a+b$ puis selon a :

$$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}...$$

Une autre idée est de se rappeler que tout entier ≥ 1 est produit d'une unique puissance de 2 par un unique impair, ce que se traduit par la bijection $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbf{N}^2 & \widetilde{\longrightarrow} & \mathbf{N}^* \\ \binom{a}{b} & \longmapsto & 2^a(2b+1) \end{array}\right.$.

Quant aux rationnels, regardons déjà ceux positifs : si on arrive à les énumérer, on pourra énumérer ceux négatifs de la même faon (en oubliant le signe), ce qui permettra d'énumérer tous les rationnels en en alternant un positif et un négatif (comme l'on a énuméré $\mathbf{Z}$). Or un rationnel positif s'écrit la forme $\frac{a}{b}$ avec $(a,b) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}^*$: on peut par conséquent énumérer $\mathbf{Q}_+$ en serpent comme pour $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ (où l'on replace un couple $\binom{a}{b}$ par la fraction $\frac{a}{b}$) à condition de retirer toutes les fractions réductibles (qui sont déjà comptées par leur fraction réduite associée).

14. Pour "retirer" un élément dans $[0,1]$ de façon bijective, ce que l'on sait faire pour $\mathbf{N}$, il suffit de trouver une "copie" de $\mathbf{N}$ dans $[0,1]$: par exemple les inverses $\frac{1}{n}$ pour n décrivant $\mathbf{N}^*$. On obtient ainsi une bijection $\varphi : \left\{\begin{array}{ccc} [0,1] & \widetilde{\longrightarrow} & [0,1[\\ \frac{1}{n} \text{ où } n \in \mathbf{N}^* & \longmapsto & \frac{1}{n+1} \\ \left[\begin{array}{c} t \text{ autre que les } \frac{1}{n} \\ \text{pour } n \text{ parcourant } \mathbf{N}^* \end{array}\right] & \longmapsto & t \end{array}\right.$.

Pour justifier le caractère injectif de φ, on peut utiliser l'exercice 12 en remarquant que l'image d'un réel $t \in [0,1]$ est l'inverse d'un entier ssi t est lui-même l'inverse d'un entier, ce qui montre la disjonction des images de φ restreinte respectivement à l'ensemble des $\frac{1}{n}$ pour n parcourant $\mathbf{N}^*$ et à l'ensemble des autres réels de $[0,1]$.

Le caractère surjectif de φ s'obtient par disjonction des cas : un réel de $[0,1[$ est ou bien l'inverse d'un entier $n \geq 1$ (mais alors n ne peut valoir 1 puisque l'inverse de 1 n'est pas dans $[0,1[$), donc l'image de $\frac{1}{n-1}$, ou bien n'est pas l'inverse d'un entier et vaut son image par φ.

Pour "renverser" les bornes, on restreint l'injection $1-\mathrm{Id}$ à $[0,1[$, ce qui fournit une bijection de $[0,1[$ sur son image $]0,1]$. De même, la restriction de l'injection φ à $]0,1]$ induit une bijection sur son image $]0,1[$.

On a ainsi montré que les quatre intervalles infinis $[0,1]$, $[0,1[$, $]0,1]$ et $]0,1[$ étaient en bijection.

Par ailleurs, un segment $[a,b]$ peut être mis en bijection avec $[0,1]$ par une fonction affine : considérer la bijection $\left\{\begin{array}{ccc} [0,1] & \widetilde{\longrightarrow} & [a,b] \\ t & \longmapsto & a+t(b-a) \end{array}\right.$. En restreignant cette dernière à l'un des quatre intervalles $[0,1]$, $[0,1[$, $]0,1]$ ou $]0,1[$, on montre que tous les intervalles *bornés* de $\mathbf{R}$ sont en bijection.

Restent les intervalles non bornés. Il y d'une part l'intervalle $\mathbf{R} =]-\infty,\infty[$, d'autre part les intervalles dont exactement *une* borne est finie. Considérons I l'un de ces derniers : quitte à appliquer l'injection $-\mathrm{Id}$, on peut supposer que la borne *inférieure* de I est finie ; quitte à appliquer une translation (qui est injective), on peut supposer que cette borne inférieure vaut 0, ce qui montre que I est en bijection avec $\mathbf{R}_+$ ou $\mathbf{R}_+^*$. Il reste donc à montrer que les intervalles $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}_+$ et $\mathbf{R}_+^*$ sont en bijection avec $[0,1]$.

Il suffit pour cela de restreindre à eux une injection *bornée*, à l'instar de atn : $\mathbf{R} \widetilde{\longrightarrow} \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. En effet, les trois restrictions induiront des bijections respectivement de $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}_+$ et $\mathbf{R}_+^*$ sur des intervalles *bornés*, lesquels sont tous en bijection par ce qui précède.

15. Supposons donnée une énumération des réels. Par restrictions, on en déduit une énumération des réels de $[0,1]$, que l'on écrira sous forme de développements décimaux propres[1] :

$$\begin{array}{l} 0,a_1b_1c_1d_1..., \\ 0,a_2b_2c_2d_2..., \\ 0,a_3b_3c_3d_3..., \\ 0,a_4b_4c_4d_4..., \\ ... \end{array}$$

En notant (pour N entier) $\overline{N}$ un entier compris entre 0 et 8 et différant de N, le développement décimal $0,\overline{a_1}\overline{b_2}\overline{c_3}\overline{d_4}...$ est propre (car il ne contient aucun 9) et définit un réel de $[0,1]$: ce dernier ne peut apparaître dans la liste ci-dessus puisque, pour tout entier n, les n-ièmes décimales diffèrent. Voici une belle contradiction !

[1] Un développement décimal est dit ***propre*** s'il ne termine pas par une infinité de 0. Tout réel admet un unique développement propre. (Sans la propreté, il peut exister un second développement impropre, par exemple $1 = 0,9999....$)

16. On obtient les cycles en itérant la permutation considérée sur un point donné :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 6 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = (1,2,5)(3,6,4)\text{, signature } (-1)^{3-1}(-1)^{3-1} = 1\,;$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 3 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix} = (1,5,6)\text{, signature } (-1)^{3-1} = 1\,;$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 1 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix} = (1,3)(2,5)(4,6)\text{, signature } (-1)(-1)(-1) = -1\,;$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 4 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (1,6,2)(3,4,5)\text{, signature } (-1)^{3-1}(-1)^{3-1} = 1\,;$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 1 & 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} = (1,5,6,2,4,3)\text{, signature } (-1)^{6-1} = -1.$$

17. Écrivons γ sous la forme $(a_1, a_2, ..., a_\ell)$. Observons tout d'abord que la composée $\varphi \circ \gamma \circ \varphi^{-1}$ agit sur un $\varphi(a_i)$ selon

$$\varphi(a_i) \overset{\varphi^{-1}}{\longmapsto} a_i \overset{\gamma}{\longmapsto} a_{i+1} \overset{\varphi}{\longmapsto} \varphi(a_{i+1}) \qquad \text{(avec la convention } a_{\ell+1} := a_1\text{)}.$$

Par ailleurs, un élément $f \in F$ est un $\varphi(a_i)$ ssi son image par φ^{-1} est un a_i, autrement dit ssi $\varphi^{-1}(f)$ appartient au support de γ, ce qui montre que γ agit sur $\varphi^{-1}(f)$ comme l'identité quand f n'est pas un $\varphi(a_i)$. On en déduit que $\varphi \circ \gamma \circ \varphi^{-1}$ agit sur un tel f comme l'identité :

$$f \overset{\varphi^{-1}}{\longmapsto} \varphi^{-1}(f) \overset{\gamma}{\longmapsto} \varphi^{-1}(f) \overset{\varphi}{\longmapsto} f.$$

Finalement, $\varphi \circ \gamma \circ \varphi^{-1}$ est le cycle $(\varphi(a_1), \varphi(a_2), ..., \varphi(a_\ell))$: il a même longueur (et donc même signature) que γ.

Écrivons une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_E$ comme produit de cycles à supports disjoints : $\sigma = \gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_k$ (l'entier k désigne le nombre de cycles). La composée $\varphi \circ \sigma \circ \varphi^{-1}$ vaut alors

$$\varphi \circ \sigma \circ \varphi^{-1} = \varphi\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_k\varphi^{-1} = \varphi\gamma_1\varphi^{-1}\varphi\gamma_2\varphi^{-1}\varphi\cdots\varphi\gamma_k\varphi^{-1} = \left(\varphi\gamma_1\varphi^{-1}\right)\left(\varphi\gamma_2\varphi^{-1}\right)\cdots\left(\varphi\gamma_k\varphi^{-1}\right).$$

Montrons que les cycles $\varphi\gamma_i\varphi^{-1}$ sont à supports disjoints (pour i variant de 1 à k). Soit f un élément dans le support de $\varphi\gamma\varphi^{-1}$ et dans celui de $\varphi\gamma'\varphi^{-1}$ où γ et γ' sont deux cycles à supports disjoints de σ. L'élément f s'écrit d'une part $\varphi(e)$ pour un élément e du support de γ, d'autre part $\varphi(e')$ pour un élément e' du support de γ' : or l'injectivité de φ implique l'égalité $e = e'$, d'où un élément commun aux supports de γ et γ', ce qui impose l'égalité des cycles $\gamma = \gamma'$ et, partant, celles des cycles $\varphi\gamma\varphi^{-1} = \varphi\gamma'\varphi^{-1}$, ce qu'il fallait démontrer.

18. **Première méthode.**

Grand principe : une injection induit toujours une bijection de sa source sur son image, ce qui s'écrit ici $B \overset{g}{\longrightarrow} \operatorname{Im} g$, que l'on souhaite être en bijection avec A.

Notons par commodité A_∞ la réunion $A_1 \cup A_2 \cup \cdots$ et considérons une bijection $\varphi : A_0 \cup A_\infty \longrightarrow A_\infty$ comme dans l'énoncé. On la prolonge sur A en prenant l'identité partout ailleurs, ce qui définit une application

$$\overline{\varphi} : \left\{ \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A \\ a \in A_0 \cup A_\infty & \longmapsto & \varphi(a) \\ a \notin A_0 \cup A_\infty & \longmapsto & a \end{array} \right. \qquad \text{(on a bien } \forall a \in A,\ \varphi(a) \in \operatorname{Im}\varphi = A_\infty \subset A\text{)}.$$

L'application $\overline{\varphi}$ est injective comme recollement de deux applications injectives d'images disjointes (*cf.* exercice 12), donc induit une bijection de A sur son image. Cette dernière est la réunion des images de ses restrictions à $A_0 \cup A_\infty$ et à son complémentaire A', ce qui s'écrit $\operatorname{Im}\overline{\varphi} = A_\infty \cup A'$. Or A_0 est disjoint des $A_{n\geq 1}$ (ces derniers sont tous inclus dans $\operatorname{Im} g$), donc A se décompose en

$$A = (A_0 \cup A_\infty) \cup A' = A_0 \cup \underbrace{(A_\infty \cup A')}_{\operatorname{Im}\overline{\varphi}} \text{ (où toutes les unions sont disjointes).}$$

L'image $\operatorname{Im}\overline{\varphi}$ est donc le complémentaire de A_0 dans A, *i. e.* $\operatorname{Im} g$. On en déduit $A \overset{\overline{\varphi}}{\longrightarrow} \overline{\varphi}(A) = \operatorname{Im}\overline{\varphi} = \operatorname{Im} g$.

Construire φ est aisé : il s'agit de créer un décalage des indices dans la suite A_n, ce qui se fait naturellement en considérant $g \circ f$ qui envoie A_n sur A_{n+1} pour tout entier $n \geq 0$ (par définition de A_n). L'application $\varphi := g \circ f$ ainsi définie sur $A_0 \cup A_\infty$ est injective comme composée de deux injections et d'image A_∞, ce qu'il fallait démontrer.

Seconde méthode.

Un élément ayant un nombre impair de passés étant nécessairement l'image d'un élément ayant un nombre pair de passés[2], on dispose de deux surjections $A_0 \overset{f}{\twoheadrightarrow} B_1$ et $B_0 \overset{g}{\twoheadrightarrow} A_1$; puisque f et g sont injectives, ce sont des bijections. On a de même une bijection $A_\infty \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} B_\infty$, d'où en recollant tout une bijection

$$\begin{array}{ccc} A = A_0 \cup A_1 \cup A_\infty & \widetilde{\longrightarrow} & B_1 \sqcup B_0 \sqcup B_\infty = B \\ a \in A_0 & \longmapsto & f(a) \in B_1 \\ a \in A_1 & \longmapsto & g^{-1}(a) \in B_0 \\ a \in A_\infty & \longmapsto & f(a) \in B_\infty \end{array}.$$

[2] Attention à ne pas inverser les parités, un élément n'ayant aucun passé ne peut être une image !