Langage fonctionnel

(T. G. 3)

1. Déterminer parmi les correspondances suivantes lesquelles sont des fonctions, des applications, des injections, des surjections ou des bijections. Décrire le cas échéant les antécédents d'une image donnée :
   (a) à un être humain associer sa mère ;
   (b) à un être vivant associer son cousin ;
   (c) à un couple (d'êtres humains) associer leur enfant ainé ;
   (d) à un élève associer sa note à une interro de cours ;
   (e) à un croissant dans une boulangerie associer son prix ;
   (f) à une flèche associer son extremité ;
   (g) à un vecteur associer son origine ;
   (h) à un vecteur associer l'origine d'un de ses représentants ;
   (i) à un vecteur associer la norme d'un de ses représentants ;
   (j) à une droite associer son point de rencontre avec un cercle donné ;
   (k) à une droite tangente à un cercle donné associer son point de tangence ;
   (l) à une droite tangente à une sphère donnée associer son point de tangence ;
   (m) à une droite lui associer sa direction ;
   (n) à une courbe plane lui associer son orientation ;
   (o) à une ordonnée associer l'abscisse du point d'intersection de la droite possèdant cette ordonnée avec le graphe d'une fonction fixée ;
   (p) à une fonction associer le point où elle s'annule ;
   (q) à une fonction associer sa fonction dérivée ;
   (r) à une fonction associer sa valeur en 18 ;
   (s) à une fonction associer sa limite en 42.

2. Construire les graphes des fonctions suivantes :
   (a) $2\,\mathrm{Id}-3$; $\quad \frac{\mathrm{Id}+2}{2\,\mathrm{Id}+1}$; $\quad \frac{5\,\mathrm{Id}+7}{3-\mathrm{Id}}$;
   (b) $2\,\mathrm{Id}^{\times 2}-4\,\mathrm{Id}+1$; $\quad 3\,\mathrm{Id}-\mathrm{Id}^{\times 2}+1$;
   (c) $|5\,\mathrm{Id}-2|$; $\quad 4-\left|\frac{\mathrm{Id}}{3}-1\right|$; $\quad |\mathrm{Id}+3|-|2\,\mathrm{Id}-1|$;
   (d) $\left\lfloor\frac{\cdot}{2}\right\rfloor$; $\quad \sqrt{\frac{\cdot}{3}-5}$; $\quad \frac{3}{2}\sqrt{\frac{\cdot}{2}+3}$;
   (e) $3\cos(2\cdot)$; $\quad \tan\left(2\,\mathrm{Id}-\frac{\pi}{4}\right)$.

3. Pour chacun des couples (f,g) d'applications suivantes, déterminer si les composées $g\circ f$ et $f\circ g$ font sens et les calculer le cas échéant :
   (a) $f:\left\{\begin{array}{ccc}[2,\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R}\\ a & \longmapsto & \sqrt{a-2}\end{array}\right.$ et $g:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R}\\ b & \longmapsto & b^2+4\end{array}\right.$;
   (b) $f:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbf{R}\setminus\{1\} & \longrightarrow & \mathbf{R}\\ \sigma & \longmapsto & \frac{2\sigma+3}{\sigma-1}\end{array}\right.$ et $g:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbf{R}\setminus\{3\} & \longrightarrow & \mathbf{R}\\ \tau & \longmapsto & \frac{\tau+1}{\tau-3}\end{array}\right.$;
   (c) $f:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbf{N} & \longrightarrow & \mathbf{Z}\\ \varphi & \longmapsto & \left\{\begin{array}{c}\frac{\varphi}{2} \text{ si } \varphi \text{ est pair}\\ -\frac{\varphi+1}{2} \text{ si } \varphi \text{ est impair}\end{array}\right.\end{array}\right.$ et $g:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbf{Z} & \longrightarrow & \mathbf{N}\\ \psi & \longmapsto & \left\{\begin{array}{c}2\psi \text{ si } \psi\geq 0\\ -2\psi-1 \text{ si } \psi<0\end{array}\right.\end{array}\right.$.

4. Montrer que l'application $\left\{\begin{array}{ccc}\mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R}\\ f & \longmapsto & 2f-\sqrt{1+f^2}\end{array}\right.$ est injective et déterminer sa réciproque.

5. Même question que précédemment avec les applications $\left\{\begin{array}{ccc}\mathbf{R}_+ & \longrightarrow & \mathbf{R}\\ \zeta & \longmapsto & \frac{e^{\zeta}+e^{-\zeta}}{2}\end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{ccc}\mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R}\\ b & \longmapsto & \frac{e^{b}-e^{-b}}{2}\end{array}\right.$.

6. Décrire les neuf applications $\varphi \circ \alpha$ lorsque φ décrit $\{\sin, \cos, \tan\}$ et α parcourt $\{\operatorname{asn}, \operatorname{acs}, \operatorname{atn}\}$. Simplifier de même les trois composées $\operatorname{asn} \circ \sin$, $\operatorname{acs} \circ \cos$ et $\operatorname{atn} \circ \tan$.
7. Montrer que l'application qui à deux réels (a, b) associe la fonction $a \operatorname{Id}_{\mathbf{R}} + b$ est injective. Qu'en est-il de l'application $(a, b, c) \mapsto a \operatorname{Id}_{\mathbf{R}}^{\times 2} + b \operatorname{Id}_{\mathbf{R}} + c$?
8. On se donne six réels $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ avec $a\alpha \neq 0$. À quelle condition les applications $a \operatorname{Id}_{\mathbf{R}}^{\times 2} + b \operatorname{Id}_{\mathbf{R}} + c$ et $\alpha \operatorname{Id}_{\mathbf{R}}^{\times 2} + \beta \operatorname{Id}_{\mathbf{R}} + \gamma$ commutent-elles ?
9. Soient trois applications $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$ telles que $h \circ g$ et $g \circ f$ soient bijectives. Montrer que f, g et h sont des bijections.
10. Soient trois applications $E \xrightarrow{f,g,h} E$ telles que les applications $h \circ g \circ f$ et $f \circ g \circ h$ soient respectivement une injection et une surjection. Montrer que f, g et h sont bijectives.
11. On se donne quatre applications $\begin{array}{ccc} A & \overset{s}{\twoheadrightarrow} & B \\ \downarrow f & & \downarrow g \\ C & \overset{i}{\hookrightarrow} & D \end{array}$ de sorte que le diagramme commute[1]. Montrer qu'il y a un unique h faisant commuter le diagramme $\begin{array}{ccc} A & \overset{s}{\twoheadrightarrow} & B \\ \downarrow f & \swarrow_h & \downarrow g \\ C & \overset{i}{\hookrightarrow} & D \end{array}$.
12. Soit une application $f : A \longrightarrow B$ dont la source A est réunion de deux parties disjointes E et F telles que les restrictions $f_{|E}$ et $f_{|F}$ soient injectives et d'images disjointes. Montrer que f est injective. Contre-exemple si les images des restrictions ne sont plus supposées d'image disjointes ?
13. Montrer que les ensembles suivants sont en bijection : $\mathbf{N}$, $\mathbf{N}^*$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{N}^2$ et $\mathbf{Q}$.
14. Montrer que $[0, 1]$ et $]0, 1]$ sont en bijection et en déduire que tous les intervalles infinis de $\mathbf{R}$ sont en bijection.
15. Montrer que $\mathbf{R}$ ne peut être mis en bijection avec $\mathbf{N}$. (hint : se restreindre à $[0, 1]$, lister les développements décimaux et en construire un qui ne peut apparaître dans cette liste en "perturbant" la diagonale)
16. Factoriser en cycles à supports disjoints les permutations $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 6 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 3 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 1 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 4 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 1 & 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$. Quelles sont leurs signatures ?
17. Soient $\varphi : E \overset{\sim}{\longrightarrow} F$ une bijection et γ un cycle de E. Montrer que $\varphi \circ \gamma \circ \varphi^{-1}$ est un cycle de F dont on donnera la longueur et la signature en fonction de celles de γ. En déduire, à partir de la décomposition en cycles à supports disjoints d'une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_E$ donnée, la décomposition en cycles à supports disjoints de $\varphi \circ \sigma \circ \varphi^{-1}$.
18. On se donne deux injections $\left\{ \begin{array}{l} f : A \hookrightarrow B \\ g : B \hookrightarrow A \end{array} \right.$. On souhaite montrer que A et B sont en bijection.

    Méthode 1.

    (a) Montrer qu'il suffit de bijecter A et $g(B)$.
    (b) On définit $A_0 := A \backslash g(B)$ et $A_n := [g \circ f]^{\circ n}(A_0)$ pour tout entier $n \geq 0$. Montrer qu'il suffit de bijecter $A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup \cdots$ avec $A_1 \cup A_2 \cup \cdots$.
    (c) Terminer la preuve en "recollant" des injections.

    Méthode 2. On appelle ***futur*** d'un $a \in A$ tout élément de la forme $\cdots g \circ f \circ g \circ f(a)$ et ***futur*** d'un $b \in B$ tout élément de la forme $\cdots f \circ g \circ f \circ g(b)$. Un ***passé*** d'un $x \in A \cup B$ est un élément dont x est un futur.

    On définit A_0, A_1, A_∞ respectivement comme l'ensemble des $a \in A$ ayant un nombre pair, impair, infini respectivement de passés. On définit de même B_0, B_1, B_∞.

    Conclure en bijectant respectivement A_0, B_1 et A_∞ avec B_0, A_1 et B_∞.

[1] Un diagramme d'applications est dit *commutatif* si, lorsque l'on suit deux chemins de flèches partant d'un même ensemble E et arrivant à un même ensemble F, les composées ainsi obtenues sont les mêmes.