Vecteurs

(T. G. 2)

Solution proposée.

1. On applique le cours : la distance cherchée vaut

$$\frac{|2\,(2)+3\,(2)+5\,(3)|}{\sqrt{2^2+3^2+5^2}}=\frac{25}{\sqrt{38}}.$$

2. En introduisant deux vecteurs $u\,(a,b,c)$ et $v\,(\alpha,\beta,\gamma)$, la comparaison souhaitée se réécrit $(u\cdot v)^2\overset{?}{\leq}\|u\|^2\,\|v\|^2$, ce qui est précisément la comparaison de Buniakovski-Cauchy-Schwarz.

3. Un dessin suggère que la condition cherchée est $\lambda=0$. Montrons-le proprement.

   L'alignement des trois points $\binom{2}{3}$, $\binom{4}{1}$ et $\binom{5}{\lambda}$ équivaut à la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{\binom{2}{3}\binom{4}{1}}$ et $\overrightarrow{\binom{2}{3}\binom{5}{\lambda}}$, donc à la nullité du déterminant $\begin{vmatrix}2&3\\-2&\lambda-3\end{vmatrix}$, ce qui s'écrit $2\,(\lambda-3)+6=0$, *i. e.* $\lambda=0$.

4. Appelons A et u les point et vecteur donnés. Notons $\Delta:=A+\mathbb{R}u$ la droite cherchée. Considérons un point $M\,(x,y,z)$. Il appartient à Δ ssi $\overrightarrow{AM}\parallel u$, *i. e.* ssi $\overrightarrow{AM}\times u=0$. Or le produit vectoriel vaut

$$\begin{pmatrix}x-1\\y-5\\z\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(y-5)\,1-3z\\z\,(-2)-(x-1)\,1\\3\,(x-1)-(y-5)\,(-2)\end{pmatrix},$$

   d'où l'équivalence

$$M\in\Delta\iff\frac{y-5}{3}=z=\frac{1-x}{2}.$$

5. La droite sur laquelle on projette valant $\mathbb{R}\,(2,1,-2)$, le projeté s'écrira $\lambda\,(2,1,-2)$ pour un certain scalaire λ. En notant H le point associé au veteur cherché et A celui associé au vecteur projeté, on doit de plus avoir l'orthogonalité $\overrightarrow{AH}\cdot(2,1,-2)=0$, ce qui s'écrit

$$0=\begin{pmatrix}2\lambda-3\\\lambda+1\\-2\lambda-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}=(2\lambda-3)\,2+(\lambda+1)\,1+(-2\lambda-1)\,(-2)=9\lambda-3,$$

   d'où $\lambda=\frac{1}{3}$. On en déduit le vecteur cherché :

$$\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right).$$

6. Notons A, B et C les trois points de l'énoncé et π le plan qu'ils déterminent. Fixons un point $M\,(x,y,z)$. Il appartient au plan π ssi le vecteur $\overrightarrow{AM}$ est coplanaire avec $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, ce qui équivaut à la nullité du déterminant

$$\begin{aligned}\operatorname{Det}\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)&=\begin{vmatrix}x-1&0&-2\\y-1&-1&2\\z-1&2&0\end{vmatrix}\\&=\begin{array}{c}(x-1)\,(-1)\,0+0\cdot2\,(z-1)+(-2)\,(y-1)\,2\\-\,(z-1)\,(-1)\,(-2)-2\cdot2\,(x-1)-0\,(y-1)\,0\end{array}\\&=-4x-4y-2z+10.\end{aligned}$$

   On en déduit une équation du plan π :

$$2x+2y+z=5.$$

7. Il suffit de prendre un vecteur orthogonal à deux vecteur du plan non colinéaires, par exemple le produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ où l'on a noté A, B et C les trois points de l'énondé. Ce produit vectoriel vaut

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)\,3 - 2 \cdot 1 \\ 2\,(-2) - 1 \cdot 3 \\ 1 \cdot 1 - (-1)\,(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -9 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

8. Un vecteur sera parallèle au plan de l'énoncé ssi il est orthogonal à un vecteur normal à ce plan. Or un tel veteur normal se lit dans l'équation du plan : $(2, -1, -1)$. On cherche donc un vecteur (a, b, c) qui soit orthogonal à $(2, -1, -1)$ et à $(1, 1, 1)$, ce qui s'écrit

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \text{ et } \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} 2a = b + c \\ b + c = -a \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} 2a = -a \\ b + c = -a \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} a = 0 \\ c = -b \end{array} \right. \iff \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit un vecteur comme souhaité : $(0, 1, -1)$.

9. La droite-intersection est dirigée par le produit vectoriel de deux vecteurs normaux aux plans, par exemple $(1, 2, 1)$ et $(1, -2, 2)$ (lus dans les équations). On cherche donc un multiple scalaire de

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

qui soit de norme 2. Il convient donc de considérer $(6, -1, -4)$ divisé par sa norme et multiplié par 2 (ce vecteur aura les direction et norme souhaitées). Or la norme de $(6, -1, -4)$ vaut $\sqrt{6^2 + 1^2 + 4^2} = \sqrt{53}$. Un vecteur convenant est donc

$$\frac{2}{\sqrt{43}}\,(6, -1, -4)\,.$$

10. La droite est dirigée par le produit vectoriel de deux vecteurs normaux des plans dont elle est l'intersection, par exemple $(1, 2, -1)$ et $(1, 1, 2)$ (lus dans les équations). Le produit vectoriel vaut

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ qui est de norme } \sqrt{5^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{35}.$$

On en déduit le produit scalaire de ce produit vectoriel contre le vecteur $(1, 0, 0)$, à savoir 5 (récupérer l'abscisse), d'où l'on tire le cosinus de l'angle cherché : $\frac{5}{\sqrt{351}} = \sqrt{\frac{5}{7}}$. L'angle correspondant vaut environ $32, 3°$.

11. L'équation de la droite se réécrit $\begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = 0$, ce qui revient à la colinéairité de $\overrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}$ et $\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$; par conséquent, ce dernier vecteur dirige la droite de l'énoncé. Pour trouver l'angle cherché, il suffit d'évaluer le produit scalaire

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1$$

et de le diviser par les normes $\sqrt{4^2 + 3^3 + 5^2} = 2\sqrt{17}$ et $\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$. On obtient un cosinus valant $\frac{-1}{2\sqrt{34}}$, ce qui correspondant à un angle d'environ $94.9°$.

12. La droite est dirigée par le vecteur $u := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (lus dans l'équation) et passe (par exemple) par le point $\Omega\,(-1, 1, 0)$. En appelant A le point de l'énoncé, la distance cherchée vaut (*cf.*

cours) $\frac{\left\|\overrightarrow{\Omega A}\times u\right\|}{\|u\|}$. On calcule donc le produit vectoriel

$$\overrightarrow{\Omega A}\times u=\begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-5\\5\end{pmatrix}$$

ainsi que les normes $\left\|\overrightarrow{\Omega A}\times u\right\|=\sqrt{0^2+5^2+5^2}=5\sqrt{2}$ et $\|u\|=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}$. La distance cherchée vaut finalement $5\sqrt{\frac{2}{3}}$.

13. Notons u un tel vecteur. Il est coplanaire avec $(2,-1,1)$ et $(1,2,-2)$, donc s'écrit $\lambda(2,-1,1)+\mu(1,2,-2)$ pour certains scalaires λ et μ. D'autre part, son produit scalaire contre $(1,1,-2)$ est nul, ce qui s'écrit

$$0=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\lambda+\mu\\-\lambda+2\mu\\\lambda-2\mu\end{pmatrix}=(2\lambda+\mu)+(-\lambda+2\mu)-2(\lambda-2\mu)=-\lambda+5\mu,$$

d'où l'on déduit $\lambda=5\mu$. Il en résulte $u=\begin{pmatrix}2(5\mu)+\mu\\-(5\mu)+2\mu\\(5\mu)-2\mu\end{pmatrix}=\mu\begin{pmatrix}11\\-3\\3\end{pmatrix}$. Or u est par ailleurs unitaire, ce qui s'écrit

$$1=\|u\|=\|\mu(11,-3,3)\|=|\mu|\sqrt{11^2+3^2+3^2}=|\mu|\sqrt{139},$$

d'où l'on tire $\mu=\pm\frac{1}{\sqrt{139}}$ et finalement

$$u=\frac{\pm1}{\sqrt{139}}(11,-3,3).$$

14. Notons $A(x,y,z)$ le point de $\Delta\cap\Pi$. Ses coordonnées vérifient le système

$$\begin{cases}x-2z=3\\y-2z=0\\x+3y-z=4\end{cases}\iff\begin{cases}x=2z+3\\y=2z\\x+3y-z=4\end{cases}\iff\begin{cases}x=2z+3\\y=2z\\(2z+3)+3(2z)-z=4\end{cases}\iff\begin{cases}x=2z+3\\y=2z\\7z=1\end{cases},$$

d'où l'on déduit $A=\frac{1}{7}(23,2,1)$.

La droite cherchée est orthogonale à un vecteur normal au plan Π (puisqu'elle est dans Π) (par exemple $(1,3,-1)$) ainsi qu'à un vecteur directeur de Δ, lequel peut-être obtenu en faisant le faisant le produit vectoriel de deux vecteurs normaux aux plans dont Δ est l'intersection (par exemple $(1,0,-2)$ et $(0,1,-2)$, dont le produit vectoriel vaut $(2,2,1)$). Elle est donc dirigée par le produit vectoriel $u:=\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-3\\-4\end{pmatrix}$. On en déduit qu'un point $M(x,y,z)$ appartient à la droite cherchée ssi

$$\overrightarrow{AM}\times u=0,\text{ ce qui s'écrit }0=\begin{pmatrix}x-\frac{23}{7}\\y-\frac{2}{7}\\z-\frac{1}{7}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-5\\3\\4\end{pmatrix},\text{ ou encore}$$

$$\frac{x-\frac{23}{7}}{-5}=\frac{y-\frac{2}{7}}{3}=\frac{z-\frac{1}{7}}{4},\text{ soit }\frac{23-7x}{35}=\frac{7y-2}{21}=\frac{7z-1}{4}.$$

15. Considérons un trièdre orthonormé direct (i,j,k) ainsi que deux vecteurs u et v du plan Oij. Les angles $\binom{\alpha}{\beta}=\binom{\widehat{iOu}}{\widehat{iOv}}$ permettent d'exprimer les coordonnées de u et v dans la base (i,j), à savoir $u\binom{\cos\alpha}{\sin\beta}$ et $v\binom{\cos\beta}{\sin\beta}$, d'où le produit vectoriel

$$u\times v=\begin{pmatrix}\cos\alpha\\\sin\alpha\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\cos\beta\\\sin\beta\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\cos\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta\end{pmatrix}.$$

Par ailleurs, ce produit vectoriel vaut aussi $\|u\|\|v\|\sin(\beta-\alpha)k$ (bien s'assurer que les signes vont bien), ce qui s'écrit $u\times v=(0,0,\sin(\beta-\alpha))$. On conclut en identifiant les cotes.

16. Vu la sphéricité du problème, l'usage des coordonnées sphériques semble pertinent. Sans nuire à la généralité, on peut supposer que l'un des sommets est $S := (0,0,1)$. Les trois autres sommets A, B, C ont alors même latitude φ. Leurs longitudes sont par ailleurs espacées chacune de $\pm\frac{2\pi}{3}$: sans nuire à la généralité, on peut supposer qu'elles valent 0 et $\pm\frac{2\pi}{3}$. Les trois sommets autre que S ont alors pour coordonnées

$$A\begin{pmatrix}\sin\varphi\\0\\\cos\varphi\end{pmatrix},\ B\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{2}\sin\varphi\\\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi\\\cos\varphi\end{pmatrix}\text{ et }C\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\sin\varphi\\-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi\\\cos\varphi\end{pmatrix}.$$

Puisque le tétraèdre $SABC$ est régulier, les angles $\widehat{AOC}$ et $\widehat{AOS}$ sont égaux, ce qui s'écrit en termes de produits scalaires (tous les vecteurs considérés sont unitaires)

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OS},\ i.\ e.\ 0=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{CS}=\begin{pmatrix}\sin\varphi\\0\\\cos\varphi\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\dfrac{1}{2}\sin\varphi\\\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi\\1-\cos\varphi\end{pmatrix},$$

soit encore (en introduisant $c := \cos\varphi$) $0=\frac{1-c^2}{2}+c-c^2$, *i. e.* $0=c^2-\frac{2}{3}c-\frac{1}{3}=(c-1)\left(c+\frac{1}{3}\right)$. La racine $c=1$ (*i. e.* $\varphi=0$) est à rejeter car elle imposerait $A=B=C=S$. Il reste donc

$$\cos\varphi=-\frac{1}{3}\qquad(\text{d'où l'on tirerait }\varphi\simeq 109,47°).$$

La longitude étant comprise entre 0 et π, son sinus est positif, d'où l'on déduit

$$\sin\varphi=+\sqrt{1-\cos^2\varphi}=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{1}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

On peut ainsi expliciter les quatre sommets

$$S\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\ A\begin{pmatrix}\frac{2\sqrt{2}}{3}\\0\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix},\ B\begin{pmatrix}-\dfrac{\sqrt{2}}{3}\\\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\\-\dfrac{1}{3}\end{pmatrix}\text{ et }C\begin{pmatrix}-\dfrac{\sqrt{2}}{3}\\-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\\-\dfrac{1}{3}\end{pmatrix},$$

ce qui permet de calculer le volume cherché comme étant le sixième (un parallélépipède est découpé en six tétraèdres de même volume) du déterminant

$$\begin{aligned}\operatorname{Det}\left(\overrightarrow{AS},\overrightarrow{BS},\overrightarrow{CS}\right)&=\begin{vmatrix}-\frac{2\sqrt{2}}{3}&\frac{\sqrt{2}}{3}&\frac{\sqrt{2}}{3}\\0&-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}&\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\\\frac{4}{3}&\frac{4}{3}&\frac{4}{3}\end{vmatrix}\\&=\begin{array}{l}\frac{-2\sqrt{2}}{3}\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\frac{4}{3}+\frac{\sqrt{2}}{3}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\frac{4}{3}+\frac{\sqrt{2}}{3}0\frac{4}{3}\\-\frac{4}{3}\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{2}}{3}-\frac{4}{3}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\frac{-2\sqrt{2}}{3}-\frac{4}{3}0\frac{\sqrt{2}}{3}\end{array}\\&=\frac{16}{9\sqrt{3}}+\frac{8}{9\sqrt{3}}+\frac{8}{9\sqrt{3}}+\frac{16}{9\sqrt{3}}\\&=3\frac{16}{9\sqrt{3}}\\&=\frac{16}{9}\sqrt{3}.\end{aligned}$$

Finalement, le volume du tétraèdre régulier inscrit dans la sphère unité vaut[1] $\frac{1}{6}\frac{16}{9}\sqrt{3}=\frac{8\sqrt{3}}{27}$.

[1] on peut le réécrire sous la forme $\frac{1}{3}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^3$ si l'on veut un volume du type $\frac{1}{3}L^3$

17. La première droite passe par le point $A := (0,5,0)$ et est dirigée par le vecteur $u := \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$, la seconde passe par le point $B := (2,0,0)$ et est dirigée par le vecteur $v := \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Le cours nous dit qu'il faut chercher deux scalaires λ et μ tels que les points $A + \lambda u$ et $B + \mu v$ forment un vecteur orthogonal à u et v ; ce vecteur "différence" vaut ici $\mu v - \lambda u + \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3\mu - 2\lambda + 2 \\ -\mu - 6\lambda - 5 \\ 2\mu - 3\lambda \end{pmatrix}$.

Les conditions cherchées s'écrivent en termes de produits scalaires contre u et v :

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3\mu - 2\lambda + 2 \\ -\mu - 6\lambda - 5 \\ 2\mu - 3\lambda \end{pmatrix} = 6\mu - 49\lambda - 26 \\ \text{et } 0 &= \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3\mu - 2\lambda + 2 \\ -\mu - 6\lambda - 5 \\ 2\mu - 3\lambda \end{pmatrix} = 14\mu - 6\lambda + 11, \end{aligned}$$

ce qui revient au système $\begin{pmatrix} 49 & -6 \\ 6 & -14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -26 \\ 11 \end{pmatrix}$. Le déterminant vaut $\begin{vmatrix} 49 & -6 \\ 6 & -14 \end{vmatrix} = -650$, d'où les solutions $\lambda = \frac{\begin{vmatrix} -26 & -6 \\ 11 & -14 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 49 & -6 \\ 6 & -14 \end{vmatrix}} = -\frac{43}{65}$ et $\mu = \frac{\begin{vmatrix} 49 & -26 \\ 6 & 11 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 49 & -6 \\ 6 & -14 \end{vmatrix}} = -\frac{139}{130}$.

Finalement, le vecteur différence cherché vaut $\begin{pmatrix} 3\left(-\frac{139}{130}\right) - 2\left(-\frac{43}{65}\right) + 2 \\ -\left(-\frac{139}{130}\right) - 6\left(-\frac{43}{65}\right) - 5 \\ 2\left(-\frac{139}{130}\right) - 3\left(-\frac{43}{65}\right) \end{pmatrix} = \frac{1}{26} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$, d'où la distance désirée en prenant la norme :

$$\left\| \frac{1}{26} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{26}\sqrt{3^2 + 1^2 + 4^2} = \sqrt{26}.$$