Calcul différentiel multiple

(T. G. 23)

Solution proposée.

1. Pour chaque question, notons f l'application considérée.

(a) f étant clairement C^∞ sur $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (les polynômes et le logarithme le sont), toute l'étude se concentre en l'origine $(0,0)$. Il s'agit de montrer que $D_1 f$ et $D_2 f$ se prolongent continûment en $(0,0)$.

Soit $t \in \mathbf{R}^*$. On a $\frac{f\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)-f\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}}{t} = \frac{f\begin{pmatrix}t\\0\end{pmatrix}}{t} = 0 \xrightarrow{t\to 0} 0$, ce qui montre que $D_1 f$ est définie en $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ et y vaut 0. De la même façon, on montre que $D_2 f\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ fait sens et vaut 0. Les dérivées partielles de f sont donc définies sur tout le plan. Montrons qu'elle y sont continues. Il suffit de montrer la continuité en 0, *i. e.* que $D_1 f \xrightarrow{0} 0$ et que$D_2 f \xrightarrow{0} 0$.

Soit $(a,b) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Vu les égalités

$$|D_1 f(a,b)| = \frac{\partial}{\partial a}\left(ab \ln\left(a^2+b^2\right)\right) = b \ln\left(a^2+b^2\right) + ab\frac{2a}{a^2+b^2},$$

on peut majorer

$$\begin{aligned} |D_1 f(a,b)| &\leq \underbrace{|b|}_{=\sqrt{0+b^2}\leq\sqrt{a^2+b^2}} \left|\ln\left(a^2+b^2\right)\right| + 2\underbrace{|b|}_{\leq\sqrt{a^2+b^2}}\underbrace{\frac{a^2+0^2}{a^2+b^2}}_{\leq 1} \\ &\leq 2\,|r\ln r| + 2r \qquad \text{en notant } r := \sqrt{a^2+b^2} \text{ la distance à l'origine.} \end{aligned}$$

Or, lorsque $(a,b) \to (0,0)$, r tend vers 0 ; vu qu'alors $r \ln r$ tend vers 0, le membre $2\,|r\ln r| + 2r$ ci-dessus tend vers 0, ce qui conclut.

(b) Montrons que f n'est pas continue en $(0,0)$. Il suffit de trouver une courbe du plan contenant l'origine selon laquelle f ne tend pas vers $f(0,0)$.. Par exemple, la parabole d'équation $y = x^2$: pour tout $t \in \mathbf{R}^*$ on a en effet $f\begin{pmatrix}t\\t^2\end{pmatrix} = \frac{t^2t^2}{t^4+(t^2)^2} = \frac{t^4}{2t^4} = \frac{1}{2} \xrightarrow{t\to 0} \frac{1}{2}$.

Soit $u =: \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ un vecteur non nul. Montrons que $D_u f\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ fait sens et est nul. Soit $t \in \mathbf{R}^*$. On a les égalités

$$f\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}+tu\right) = f\begin{pmatrix}ta\\tb\end{pmatrix} = \frac{(ta)^2\,tb}{(ta)^4+(tb)^2} = \frac{tab}{t^2a^4+b^2}.$$

Si $b = 0$, on a la tendance $f\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}+tu\right) = 0 \xrightarrow{t\to 0} 0$; sinon, on a les comparaisons et tendance

$$\left|f\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}+tu\right)\right| = \frac{|tab|}{(ta^2)^2+b^2} \leq \frac{|t|\,|ab|}{0+|b|^2} = |t|\left|\frac{a}{b}\right| \xrightarrow{t\to 0} 0.$$

Dans tous les cas, on a montré ce qu'on voulait.

(c) f étant clairement C^∞ sur $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (comme fraction de polynômes dont le dénominateur ne s'annule qu'en $(0,0)$), toute l'étude se concentre en l'origine $(0,0)$. Il s'agit de montrer d'une part que $D_1 f$ et $D_2 f$ se prolongent continûment en $(0,0)$, d'autre part que les quatre dérivées partielles secondes sont définies en $(0,0)$ mais n'y sont pas toutes continues.

Comme à la question (1a), on montre que $D_1 f\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ et $D_2 f\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ font sens et valent 0. Ainsi les continuités de $D_1 f$ et $D_2 f$ se ramènent-elles aux tendances $D_1 f \xrightarrow{0} 0$ et $D_2 f \xrightarrow{0} 0$: montrons-les. Soit $(u,v) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Vu les égalités

$$\begin{aligned}
D_1 f\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix} &= \frac{\partial}{\partial u}\left(uv\left(1-\frac{2v^2}{u^2+v^2}\right)\right) = v\left(1-\frac{2v^2}{u^2+v^2}\right) + uv\left(-2v^2\frac{-2u}{(u^2+v^2)^2}\right) \\
&= \frac{vu^2-v^3}{u^2+v^2} + \frac{4u^2v^3}{(u^2+v^2)^2}, \text{ on peut majorer (en notant } r := \sqrt{u^2+v^2}) \\
\left|D_1 f\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\right| &\leq \left|\frac{vu^2}{r^2}\right| + \left|\frac{v^3}{r^2}\right| + 4\left|\frac{u^2v^3}{r^4}\right| \underset{\text{et } |v|\leq r}{\overset{\text{car } |u|\leq r}{\leq}} r+r+4r = 6r \overset{(u,v)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

On aurait de même les égalités

$$\begin{aligned}
D_2 f\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix} &= \frac{\partial}{\partial v}\left(uv\left(\frac{2u^2}{u^2+v^2}-1\right)\right) = u\left(\frac{2u^2}{u^2+v^2}-1\right) + uv\left(2u^2\frac{-2v}{(u^2+v^2)^2}\right) \\
&= \frac{u^3-uv^3}{u^2+v^2} - \frac{4u^3v^2}{(u^2+v^2)^2} \text{ et la majoration} \\
|D_2 f(u,v)| &\leq r+r+4r \overset{(u,v)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0, \text{ d'où les continuités des dérivées premières de } f.
\end{aligned}$$

Montrons à présent que les dérivées secondes de f sont définies en 0 y sont nulles Soit $t \in \mathbf{R}^*$. On a les égalités et tendances

$$\begin{aligned}
D_1 f\begin{pmatrix}t\\0\end{pmatrix} &= 0\frac{t^2-0^2}{t^2+0^2} + \frac{4t^2 0^3}{(t^2+0^2)^2} = 0 \overset{t\to 0}{\longrightarrow} 0, \\
D_1 f\begin{pmatrix}0\\t\end{pmatrix} &= \frac{t0^2-t^3}{0^2+t^2} + \frac{40^2t^3}{(0^2+t^2)^2} = -t \overset{t\to 0}{\longrightarrow} 0, \\
D_2 f\begin{pmatrix}t\\0\end{pmatrix} &= \frac{t^3-t0^3}{t^2+0^2} - \frac{4t^3 0^2}{(t^2+0^2)^2} = t \overset{t\to 0}{\longrightarrow} 0, \\
D_2 f\begin{pmatrix}0\\t\end{pmatrix} &= 0\frac{0^2-t^3}{0^2+t^2} - \frac{40^3t^2}{(0^2+t^2)^2} = 0 \overset{t\to 0}{\longrightarrow} 0, \text{ comme annoncé.}
\end{aligned}$$

Montrons enfin que $D_1 D_2 f$ n'est pas continue en 0. On a pour tout $(u,v) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ les égalités

$$\begin{aligned}
D_1 D_2 f\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix} &= \frac{\partial}{\partial u}\left(D_2 f\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(u - 2v^2\frac{u}{r^2} - 4v^2\frac{u^3}{r^4}\right) = 1 - 2v^2\frac{\partial}{\partial u}(?), \\
\text{d'où } D_1 D_2 f\begin{pmatrix}u\\0\end{pmatrix} &= 1, \text{ qui ne tend pas vers 0 lorsque } u \to 0, \text{ ce qui conclut.}
\end{aligned}$$

Commentaire. Cet exemple montre que le théorème de Schwarz n'admet pas de réciproque. Les dérivées croisées de f sont ici égales en l'origine tandis que $D_1 D_2 f$ n'y est pas continue (on montrerait aisément que $D_2 D_1 f$ non plus).

(d) Notons $(\alpha, \beta) := a$ et abrégeons $(p,q) := (D_1 f(a), D_2 f(a))$, de sorte que le plan tangent en a a pour équation cartésienne

$$z - f(a) = p(x-\alpha) + q(y-\beta).$$

Pour montrer l'inclusion demandée, il suffit de montrer qu'une droite tangente en a d'une part passe par un point du plan tangent en a (ce qui est trivial : le point $(\alpha, \beta, f(a))$ convient), d'autre part est dirigée par un vecteur orthogonal à un vecteur normal au plan (par exemple à $(p,q,-1)$). Montrons ce dernier point.

Soit $u =: (\lambda, \mu)$ un vecteur unitaire du plan. Dans le plan vertical dirigé par u et contenant le point $(\alpha, \beta, f(a))$, la droite tangente en a a pour pente $D_u f(a) = \lambda p + \mu q$. Elle est donc dirigée par le vecteur $(\lambda, \mu, \|u\| D_u f(a))$. Ce dernier $(\lambda, \mu, \lambda p + \mu q)$ est bien orthogonal à $(p,q,-1)$ (leur produit scalaire est nul), ce qui conclut.

2. Toutes les fonctions étudiées sont polynomiales, donc différentiables. En un éventuel extremum le gradient doit alors s'annuler. Dans chacune des questions, on note f la fonction considérée et on invoque un point extrémal (p,q) pour f.

(a) On a le système

$$\left\{\begin{array}{l} 0=\frac{\partial f(p,q)}{\partial p}=2p+2(p+q-1)=4p+2q-2 \\ 0=\frac{\partial f(p,q)}{\partial q}=2(p+q-1)+2q=2p+4q-2 \end{array}\right., \ i.\ e.\ \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de la matrice $4^2-2^2=12$ est non nul, donc on peut inverser le système, ce qui donne

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}=\frac{1}{12}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La valeur de f en le seul extremum local possible est $f\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{3}$. Regardons alors comment varie f dans un voisinage de ce candidat : on a à (x,y) fixé les égalités et comparaison

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{3}+x,\frac{1}{3}+y\right) &= \left(\frac{1}{3}+x\right)^2+\left(\frac{1}{3}+x+\frac{1}{3}+y-1\right)^2+\left(\frac{1}{3}+y\right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{3}+x\right)^2+\left(\frac{1}{3}+y\right)^2+\left(x+y-\frac{1}{3}\right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{9}+\frac{2x}{3}+x^2\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{2y}{3}+y^2\right)+\left(x^2+y^2+\frac{1}{9}+2xy-\frac{2x}{3}-\frac{2y}{3}\right) \\ &= \underbrace{\left(x^2+y^2+2xy\right)}_{=(x+y)^2\geq 0}+\underbrace{\left(x^2+y^2\right)}_{\geq 0}+\underbrace{\frac{1}{3}}_{=f\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)} \\ &\geq f\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right), \text{ ce qui montre que } \left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) \text{ est un minimum global pour } f. \end{aligned}$$

(b) On a le système

$$\left\{\begin{array}{l} 0=\frac{\partial f(p,q)}{\partial p}=3p^2-1 \\ 0=\frac{\partial f(p,q)}{\partial q}=-2q \end{array}\right., \ i.\ e.\ \left\{\begin{array}{l} p^2=\frac{1}{3} \\ q=0 \end{array}\right., \ i.\ e.\ \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La valeur de f en ces deux extrema locaux possibles sont $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}},0\right)=\frac{1}{3\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{2}{3\sqrt{3}}$ et $f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},0\right)=-\frac{1}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{2}{3\sqrt{3}}$. Regardons alors comment varie f dans un voisinage de ces candidats. Soit $(x,y)\in\mathbf{R}^2$.

On a les égalités

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+x,0+y\right) &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}+x\right)^3-y^2-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+x\right) \\ &= \left(\frac{1}{3\sqrt{3}}+3\frac{1}{\sqrt{3}^2}x+3\frac{1}{\sqrt{3}}x^2+x^3\right)-\frac{1}{\sqrt{3}}-x-y^2 \\ &= -\frac{2}{3\sqrt{3}}+x^3-y^2+\sqrt{3}x^2. \end{aligned}$$

Or l'écart $\sqrt{3}x^2+x^3-y^2$ à la valeur $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}},0\right)$ sera positif dès que $\left\{\begin{array}{l} y=0 \\ x\geq 0 \end{array}\right.$ et négatif dès que $x=0$, ce qui montre que $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},0\right)$ n'est pas un extremum local.

On a les égalités

$$\begin{aligned}
f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}+x,0+y\right) &= \left(x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3-y^2-\left(x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\\
&= \left(x^3-3x^2\frac{1}{\sqrt{3}}+3x\frac{1}{\sqrt{3}^2}-\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}-x-y^2\\
&= f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},0\right)+\sqrt{3}x^2+x^3-y^2.
\end{aligned}$$

Comme ci-dessus, l'écart $\sqrt{3}x^2+x^3-y^2$ n'a pas signe constant pour (x,y) suffisamment proche de $(0,0)$, ce qui montre que f n'a aucun extremum local.

(c) On a le système

$$\begin{cases} 0=\frac{\partial f(p,q)}{\partial p}=-3p^2 \\ 0=\frac{\partial f(p,q)}{\partial q}=8q^3-6pq+2q \end{cases}, \text{ i. e. } \begin{cases} p=0 \\ q\underbrace{\left(4q^2+1\right)}_{\geq 1>0}=0 \end{cases}, \text{ i. e. } \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La valeur de f en ce candidat est $f(0,0)=0$. Regardons alors comment varie f dans un voisinage de ce candidats. Soit $(x,y)\in\mathbf{R}^2$. On a $f(0+x,0+y)=y^2\left(2y^2-3x+1\right)$. Or la parenthèse tend vers 1 lorsque $(x,y)\to(0,0)$, donc reste supérieure à $\frac{1}{2}$ dans un certain voisinage de $(0,0)$, ce qui montre que l'écart reste positif sur ce voisinage et donc que l'origine est un minimum local pour f. Ce n'est en revanche pas un miminum global car $f(x,1)=3(1-x)$ prend des valeurs négatives.

3. [dessiner le domaine d'intégration dans chaque cas ainsi que le partitionnement utilisé pour appliquer Fubini]

(a) En partitionnant T en bandes verticales, on obtient

$$\begin{aligned}
\iint_T xy\ dx\ dy &= \int_{x=0}^1\int_{y=0}^{1-x} xy\ dy\ dx\\
&= \int_{x=0}^1 x\left(\int_{y=0}^{1-x} y\ dy\right)dx\\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 x(1-x)^2\,dx\\
&= \frac{1}{2}\int_0^1\left(x-2x^2+x^3\right)dx\\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}-\frac{2}{3}x^3+\frac{x^4}{4}\right]_{x=0}^1\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\right)\\
&= \frac{1}{24}.
\end{aligned}$$

(Partitionner en bandes horizontales aurait donné le même calcul à l'interversion de x et y près.)

(b) En partitionnant T en bandes verticales, on obtient

$$\begin{aligned}
\iint_T (x+y)\ dx\ dy &= \int_{x=0}^1\int_{y=x}^{2-x}(x+y)\ dy\ dx\\
&= \int_{x=0}^1\left[xy+\frac{y^2}{2}\right]_{y=x}^{2-x}dx\\
&= \int_0^1\left(x(2-x)+\frac{(2-x)^2}{2}-x^2-\frac{x^2}{2}\right)dx\\
&= \int_0^1\left(-2x^2+2\right)dx\\
&= 2\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^1\\
&= \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

Partitionner en bandes horizontales aurait forcé à distinguer les cas $y \leq 1$ et $y \geq 1$:

$$\iint_T (x+y)\ dx\ dy = \int_{y=0}^{1} \int_{x=0}^{y} (x+y)\, dy\ dx + \int_{y=1}^{2} \int_{x=0}^{2-y} (x+y)\, dy\ dx$$

(le calcul est donc un peu plus long).

(c) En découpant le rectangle $[0,2] \times [0,1]$ en bandes horizontales, on obtient

$$\begin{aligned}
\iint_{[0,2]\times[0,1]} \left(a^2+b\right)\ da\ db &= \int_{b=0}^{1} \int_{a=0}^{2} \left(a^2+b\right)\ da\ db \\
&= \int_{b=0}^{1} \left[\frac{a^3}{3}+ab\right]_{a=0}^{2} db \\
&= \int_{0}^{1} \left(\frac{8}{3}+2b\right) db \\
&= \left[\frac{8}{3}b+b^2\right]_{b=0}^{1} \\
&= \frac{11}{3}.
\end{aligned}$$

(Partitionner en bandes verticales aurait donné

$$\begin{aligned}
\iint_{[0,2]\times[0,1]} \left(a^2+b\right)\ da\ db &= \int_{a=0}^{2} \int_{b=0}^{1} \left(a^2+b\right)\ da\ db \\
&= \int_{a=0}^{2} \left[a^2b+\frac{b^2}{2}\right]_{b=0}^{1} da \\
&= \int_{0}^{2} \left(a^2+\frac{1}{2}\right) da \\
&= \left[\frac{a^3}{3}+\frac{a}{2}\right]_{a=0}^{2} \\
&= \frac{8}{3}+1 \\
&= \frac{11}{3}.)
\end{aligned}$$

(d) Partitionner D en bandes verticales donne

$$\begin{aligned}
\iint_D u^2v\ du\ dv &= \int_{u=0}^{1} \int_{v=0}^{2-u} u^2v\ dv\ du \\
&= \int_{u=0}^{1} u^2 \left[\frac{v^2}{2}\right]_{v=0}^{2-u} du \\
&= \frac{1}{2}\int_{0}^{1} u^2\left(2-u\right)^2 du \\
&= \int_{0}^{1} \left(2u^2-2u^3+\frac{u^4}{2}\right) du \\
&= \left[\frac{2u^3}{3}-\frac{u^4}{2}+\frac{u^5}{10}\right]_{u=0}^{1} \\
&= \frac{2}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{10} \\
&= \frac{4}{15}.
\end{aligned}$$

Partitionner en bandes horizontales aurait forcé à distinguer les cas $v \leq 1$ et $v \geq 1$:

$$\iint_D u^2v\ du\ dv = \int_{v=0}^{1} \int_{u=0}^{1} u^2v\ du\ dv + \int_{v=1}^{2} \int_{u=0}^{2-v} u^2v\ du\ dv$$

(le calcul est donc un peu plus long).

(e) Utilisons les coordonnées polaires. En partitionnant D en cercles concentriques, on trouve

$$\begin{aligned}
\iint_D \frac{dx\ dy}{1+x^2+y^2} &= \int_{\theta=-\pi}^{\pi} \int_{r=0}^{1} \frac{r\ dr\ d\theta}{1+r^2} \\
&= \int_{\theta=-\pi}^{\pi} d\theta\ \frac{1}{2} \int_{r=0}^{1} \frac{d\left(1+r^2\right)}{1+r^2} \\
&= 2\pi \times \frac{1}{2}\left[\ln\left(1+r^2\right)\right]_{r=0}^{1} \\
&= \pi \ln 2.
\end{aligned}$$

(Nous laissons au lecteur d'essayer de calculer cette intégrale à l'aide d'un Fubini vertical ou horizontal afin qu'il apprécie l'intervention des coordonnées polaires).

4. (a) Soit E une ellipse dont on note a le demi petit axe et b le demi grand axe. Son "intérieur" étant décrit par le domaine

$$\begin{aligned}
D &:= \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2\ ;\ \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \leq 1\right\} \\
&= \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2\ ;\ y^2 \leq b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\right\} \\
&= \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2\ ;\ |y| \leq b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right\},
\end{aligned}$$

son aire vaut (en partitionnant D en bandes verticales)

$$\begin{aligned}
\iint_D dx\ dy &= \int_{x=-a}^{a} \int_{y=-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} dy\ dx \\
&\overset{u:=\frac{x}{a}}{\underset{v:=\frac{y}{b}}{=}} \int_{u=-1}^{1} \int_{v=-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}} b dv\ a du \\
&= ab \int_{u=-1}^{1} 2\sqrt{1-u^2} du \\
&= 2ab \times \text{aire du demi-disque unité} \\
&= \pi ab.
\end{aligned}$$

Sanity check : lorsque l'ellipse est un cercle (*i. e.* lorsque $a = b$), on retrouve bien l'aire connue πa^2.

(b) Le problème étant pair en θ, on peut supposer $\theta \geq 0$.

Idée 1 (sans intégrale multiple). Le domaine dont on cherche l'aire vaut la différence ensembliste entre le domaine en-dessous de la droite vectorielle de pente $\frac{r \operatorname{sh} \theta}{r \operatorname{ch} \theta} = \operatorname{th} \theta$ et celui en-dessous de l'hyperbole d'équation $x^2 - y^2 = r^2$ (*i. e.* du graphe de la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2 - r^2}$ vu que les abscisses sont positives) pour $x \in [r, r \operatorname{ch} \theta]$. L'aire du premier est celle d'un triangle : elle vaut $\frac{1}{2}(r \operatorname{ch} \theta)(r \operatorname{sh} \theta) = \frac{r^2}{4} \operatorname{sh} 2\theta$. L'aire du second vaut l'intégrale

$$\begin{aligned}
\int_{x=0}^{r \operatorname{ch} \theta} \sqrt{x^2 - r^2} dx &\overset{u:=\operatorname{argch} \frac{x}{r}}{\underset{x=r \operatorname{ch} u}{=}} \int_{u=0}^{\theta} r\sqrt{\operatorname{ch}^2 u - 1} r \operatorname{sh} u\ du \\
&= r^2 \int_{u=0}^{\theta} \operatorname{sh}^2 u\ du \\
&= r^2 \int_{u=0}^{\theta} \frac{\operatorname{ch} 2u - 1}{2} du \\
&= r^2 \left[\frac{\operatorname{sh} 2u}{4} - \frac{u}{2}\right]_{u=0}^{\theta} \\
&= r^2 \frac{\operatorname{sh} 2\theta}{4} - \frac{r^2}{2}\theta.
\end{aligned}$$

L'aire cherchée vaut donc $\frac{1}{2} r^2 \theta$.

Idée 2 (avec intégrale multiple). Le segment $O\binom{r\,\mathrm{ch}\,\theta}{r\,\mathrm{sh}\,\theta}$ ayant pour pente $\frac{r\,\mathrm{sh}\,\theta}{r\,\mathrm{ch}\,\theta}=\mathrm{th}\,\theta$, le domaine dont on cherche à calculer l'aire peut se partionner en bandes horizontales comme suit :

$$D:=\coprod_{0\leq y\leq r\,\mathrm{sh}\,\theta}\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\ ;\ y\coth\theta\leq x\leq\sqrt{r^2+y^2}\right\}.$$

Ce partitionnement montre que l'aire cherchée vaut l'intégrale double

$$\begin{aligned}
\iint_D dx\ dy &= \int_{y=0}^{r\,\mathrm{sh}\,\theta}\int_{x=y\coth\theta}^{\sqrt{r^2+y^2}} dy\ dx\\
&\overset{\substack{u:=\frac{x}{r}\\ v:=\frac{y}{r}}}{=} \int_{v=0}^{\mathrm{sh}\,\theta}\int_{u=v\coth\theta}^{\sqrt{1+v^2}} rdv\ rdv\\
&= r^2\int_{v=0}^{\mathrm{sh}\,\theta}\left(\sqrt{1+v^2}-v\coth\theta\right)dv\\
&= r^2\int_{v=0}^{\mathrm{sh}\,\theta}\sqrt{1+v^2}dv-r^2\coth\theta\left[\frac{v^2}{2}\right]_{v=0}^{\mathrm{sh}\,\theta}\\
&\overset{\substack{\varphi:=\mathrm{argsh}\,v\\ dv=\mathrm{ch}\,\varphi\ d\varphi}}{=} r^2\left(\int_{\varphi=0}^{\theta}\mathrm{ch}^2\,\varphi\ d\varphi\right)-r^2\frac{\mathrm{ch}\,\theta}{\mathrm{sh}\,\theta}\frac{\mathrm{sh}^2\,\theta}{2}\\
&= r^2\left(\int_{\varphi=0}^{\theta}\frac{1+\mathrm{ch}\,2\varphi}{2}d\varphi\right)-\frac{r^2}{2}\mathrm{sh}\,\theta\,\mathrm{ch}\,\theta\\
&= r^2\left[\frac{\varphi}{2}+\frac{\mathrm{sh}\,2\varphi}{4}\right]_{\varphi=0}^{\theta}-\frac{r^2}{4}\mathrm{sh}\,2\theta\\
&= \frac{1}{2}r^2\theta.
\end{aligned}$$

Commentaire. Ce résultat est le pendant hyperbolique du classique résultat circulaire suivant : l'aire délimitée par le segement $O\binom{r}{0}$, $O\binom{r\cos\theta}{r\sin\theta}$ et par l'arc de cercle d'équation $x^2+y^2=r^2$ allant de $\binom{r}{0}$ à $\binom{r\cos\theta}{r\sin\theta}$ vaut $\frac{1}{2}r^2\theta$.

(c) Le domaine d'intégration pouvant être décrit comme

$$D:=\left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3\ ;\ 0\leq x\leq 1\text{ et }0\leq y\leq 1-x\text{ et }0\leq z\leq 3-x-y\right\},$$

l'intégrale cherchée vaut (on partitionne, dans des plans d'abscisse constante, en bandes verticales)

$$\begin{aligned}
\iiint_D dx\ dy\ dz &= \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1-x}\int_{z=0}^{3-x-y}dz\ dy\ dx\\
&= \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1-x}(3-x-y)\,dy\ dx\\
&= \int_{x=0}^{1}\left[(3-x)\,y-\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{1-x}dx\\
&= \int_0^1\left((3-x)\,(1-x)-\frac{(1-x)^2}{2}\right)dx\\
&= \int_0^1\left(\frac{x^2}{2}-3x+\frac{5}{2}\right)dx\\
&= \left[\frac{x^3}{6}-\frac{3x^2}{2}+\frac{5x}{2}\right]_{x=0}^{1}\\
&= \frac{1}{6}-\frac{3}{2}+\frac{5}{2}\\
&= \frac{7}{6}.
\end{aligned}$$

(d) Appelons T notre triangle "plein".

La masse totale vaut l'intégrale double (on partitionne en bandes verticales)

$$\iint\limits_T dx\ dy = \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{x} \frac{\sin x}{x} dy\ dx = \int_{x=0}^{1} \sin x\ dx = 1 - \cos 1.$$

L'ordonnée intégrale vaut (on partitionne en bandes verticales)

$$\begin{aligned}
\iint\limits_T y\ dx\ dy &= \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{x} \frac{\sin x}{x} y dy\ dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{x=0}^{1} x \sin x\ dx \\
&\underset{\text{successives}}{\overset{2 \text{ IPPs}}{=}} \frac{1}{2} \left[-x \cos x + \sin x\right]_{x=0}^{1} \\
&= \frac{\sin 1 - \cos 1}{2}.
\end{aligned}$$

L'abscisse intégrale vaut (on partitionne en bandes horizontales)

$$\begin{aligned}
\iint\limits_T x\ dx\ dy &= \int_{y=0}^{1} \int_{x=y}^{1} \sin x\ dx\ dy \\
&= \int_{y=0}^{1} (\cos y - \cos 1)\, dy \\
&= \sin 1 - \cos 1.
\end{aligned}$$

On en déduit que le barycentre a pour coordonnées

$$\frac{\sin 1 - \cos 1}{1 - \cos 1} \left(1, \frac{1}{2}\right) \simeq (0,66\ ;\ 0,33)\,.$$

L'abscisse carrée intégrale vaut (on partitionne en bandes horizontales)

$$\begin{aligned}
\iint\limits_T x^2\ dx\ dy &= \int_{y=0}^{1} \int_{x=y}^{1} x \sin x\ dx\ dy \\
&\underset{\text{successives}}{\overset{2 \text{ IPPs}}{=}} \int_{y=0}^{1} \left[\sin x - x \cos x\right]_{x=y}^{1} dy \\
&= \int_{0}^{1} (\sin 1 - \cos 1 - \sin y + y \cos y)\, dy \\
&= \sin 1 - \cos 1 + \left[\cos y\right]_{y=0}^{1} + \left[y \sin y + \cos y\right]_{y=0}^{1} \\
&= \sin 1 - 1 + \sin 1 + \cos 1 - 1 \\
&= 2 \sin 1 + \cos 1 - 2.
\end{aligned}$$

L'ordonnée carrée intégrale vaut (on partitionne en bandes verticales)

$$\begin{aligned}
\iint\limits_T y^2\ dx\ dy &= \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{x} \frac{\sin x}{x} y^2 dy\ dx \\
&= \frac{1}{3} \int_{x=0}^{1} x^2 \sin x\ dx \\
&\underset{\text{successives}}{\overset{3 \text{ IPPs}}{=}} \frac{1}{3} \left[-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x\right]_{x=0}^{1} \\
&= \frac{1}{3} \left(-\cos 1 + 2 \sin 1 + 2 \cos 1 - 2\right) \\
&= \frac{2 \sin 1 + \cos 1 - 2}{3} \text{ (le tiers de l'abscisse carrée intégrale).}
\end{aligned}$$

La distance carrée intégrale à l'axe des cotes vaut donc

$$\begin{aligned}
\iint\limits_T \left(x^2 + y^2\right)\ dx\ dy &= (2 \sin 1 + \cos 1 - 2) + \frac{2 \sin 1 + \cos 1 - 2}{3} \\
&= \frac{4}{3} (2 \sin 1 + \cos 1 - 2)\,,
\end{aligned}$$

d'où le moment d'inertie cherché

$$\frac{4}{3}\frac{2\sin 1+\cos 1-2}{1-\cos 1}\simeq 0,65.$$

(e) Appelons T notre "triangle" plein. Son sommet supérieur à l'intersection des droite et parabole données a des coordonnées (a,b) vérifiant $\frac{1}{2}b^2=a=4-b$, d'où $b^2+2b=8$, *i. e.* $(b+1)^2=9$, *i. e.* $b=2$ (car $b\geq 0$), d'où $a=4-b=2$. Nous pouvons donc partitionner en bandes horizontonales

$$T=\coprod_{0\leq y\leq 2}\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\ ;\ \frac{y^2}{2}\leq x\leq 4-y\right\}.$$

La masse totale vaut l'intégrale double

$$\begin{aligned}\iint_T dx\ dy &= \int_{y=0}^{2}\int_{x=\frac{y^2}{2}}^{4-y}dx\ dy\\ &= \int_{y=0}^{2}\left(4-y-\frac{y^2}{2}\right)dy\\ &= \left[4y-\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{6}\right]_{y=0}^{2}\\ &= 8-2-\frac{4}{3}\\ &= \frac{14}{3}.\end{aligned}$$

L'ordonnée intégrale vaut l'intégrale double

$$\begin{aligned}\iint_T y\ dx\ dy &= \int_{y=0}^{2}y\int_{x=\frac{y^2}{2}}^{4-y}dx\ dy\\ &= \int_{y=0}^{2}y\left(4-y-\frac{y^2}{2}\right)dy\\ &= \left[2y^2-\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{8}\right]_{y=0}^{2}\\ &= 8-\frac{8}{3}-2\\ &= \frac{10}{3}.\end{aligned}$$

L'abscisse intégrale vaut l'intégrale double

$$\begin{aligned}\iint_T x\ dx\ dy &= \int_{y=0}^{2}\int_{x=\frac{y^2}{2}}^{4-y}xdx\ dy\\ &= \frac{1}{2}\int_{y=0}^{2}\left((4-y)^2-\left(\frac{y^2}{2}\right)^2\right)dy\\ &= \frac{1}{2}\int_{y=0}^{2}\left(16-8y+y^2-\frac{y^4}{4}\right)dy\\ &= \frac{1}{2}\left[16y-4y^2+\frac{y^3}{3}-\frac{y^5}{20}\right]_{y=0}^{2}\\ &= \frac{1}{2}\left(32-16+\frac{8}{3}-\frac{32}{20}\right)\\ &= 8+\frac{4}{3}-\frac{4}{5}\\ &= \frac{128}{15}.\end{aligned}$$

Le barycentre cherchée a donc pour coordoonées

$$\frac{3}{14}\left(\frac{128}{15},\frac{10}{3}\right)=\left(\frac{64}{35},\frac{5}{7}\right)\simeq(1,83\ ;\ 0,71).$$

L'ordonnée carrée intégrale vaut

$$\begin{aligned}
\iint_T y^2 \ dx \ dy &= \int_{y=0}^{2} y^2 \int_{x=\frac{y^2}{2}}^{4-y} dx \ dy \\
&= \int_{y=0}^{2} y^2 \left(4 - y - \frac{y^2}{2}\right) dy \\
&= \left[\frac{4y^3}{3} - \frac{y^4}{4} - \frac{y^5}{10}\right]_{y=0}^{2} \\
&= \frac{32}{3} - 4 - \frac{16}{5} \\
&= \frac{52}{15}.
\end{aligned}$$

L'abscisse carrée intégrale vaut

$$\begin{aligned}
\iint_T x^2 \ dx \ dy &= \int_{y=0}^{2} \int_{x=\frac{y^2}{2}}^{4-y} x^2 dx \ dy \\
&= \frac{1}{3} \int_{y=0}^{2} \left((4-y)^3 - \left(\frac{y^2}{2}\right)^3\right) dy \\
&= \frac{1}{3} \int_{y=0}^{2} \left(-\frac{y^6}{8} - y^3 + 12y^2 - 48y + 64\right) dy \\
&= \frac{1}{3} \left[-\frac{y^7}{8 \cdot 7} - \frac{y^4}{4} + 4y^3 - 24y^2 + 64y\right]_{y=0}^{2} \\
&= \frac{404}{21}.
\end{aligned}$$

La distance carrée intégrale à l'axe des cotes vaut donc

$$\iint_T \left(x^2 + y^2\right) \ dx \ dy = \frac{52}{15} + \frac{404}{21} = \frac{2384}{105},$$

d'où le moment d'inertie cherché

$$\frac{3}{14} \frac{2384}{105} = \frac{1192}{245} \simeq 4,87.$$

(f) Les surface limites se recoupent selon l'équation

$$x^2 + 3y^2 = 8 - x^2 - y^2, \ i.\ e.\ 2x^2 + 4y^2 = 8, \ i.\ e.\ \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1,$$

ce qui décrit une ellipse centrée en l'origine d'axe focal celui des abscisses et de demi-axes 2 et $\sqrt{2}$. En notant

$$E := \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \ ; \ \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}$$

l'"intérieur" de l'ellipse précédente, le volume cherché est donc celui du domaine

$$D := \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \ ; \ (x, y) \in E \text{ et } x^2 + 3y^2 \leq z \leq 8 - x^2 - y^2\right\}.$$

En partitionnant ce dernier en bandes verticales, on obtient le volume cherché comme l'intégrale

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_D dz\ dy\ dx &= \iint\limits_{(x,y)\in E} \int_{z=x^2+3y^2}^{8-x^2-y^2} dz\ dy\ dx \\
&\overset{\substack{\text{partition de } E \text{ en} \\ \text{bandes verticales}}}{=} \int_{x=-2}^{2} \int_{y=-\sqrt{2}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}^{\sqrt{2}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} \left(8-2x^2-4y^2\right)\ dy\ dx \\
&\underset{v:=\frac{y}{\sqrt{2}}}{\overset{u:=\frac{x}{2}}{=}} \int_{u=-1}^{1} \int_{v=-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}} 8\left(1-u^2-v^2\right)\ \sqrt{2}dv\ 2du \\
&= 16\sqrt{2} \int_{u=-1}^{1} \left[\left(1-u^2\right)v - \frac{v^3}{3}\right]_{v=-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}} du \\
&= 32\sqrt{2} \int_{u=-1}^{1} \left(\left(1-u^2\right)\sqrt{1-u^2} - \frac{\sqrt{1-u^2}^3}{3}\right) du \\
&= \frac{64}{3}\sqrt{2} \int_{u=-1}^{1} \sqrt{1-u^2}^3 du \\
&\overset{\theta:=\arccos u}{=} \frac{64}{3}\sqrt{2} \int_{\theta=\pi}^{0} \sin^3\theta\ \ (-\sin\theta d\theta) \\
&= \frac{64}{3}\sqrt{2} \int_0^\pi \sin^4.
\end{aligned}$$

Vu par ailleurs les égalités (pour tout réel θ)

$$\sin^4\theta = \left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)^2 = \frac{1-2\cos 2\theta + \frac{1+\cos 4\theta}{2}}{4} = \frac{3}{8} - \frac{\cos 2\theta}{2} + \frac{\cos 4\theta}{8},$$

la dernière intégrale vaut

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \sin^4 &= \int_{\theta=0}^{\pi} \left(\frac{3}{8} - \frac{\cos 2\theta}{2} + \frac{\cos 4\theta}{8}\right) d\theta \\
&\overset{u:=2\theta}{=} \frac{3\pi}{8} + \int_{u=0}^{2\pi} \left(\frac{\cos 2u}{8} - \frac{\cos u}{2}\right) \frac{du}{2} \\
&= \frac{3\pi}{8} + \left[\frac{\sin 2u}{16} - \frac{\sin u}{2}\right]_{u=0}^{2\pi} \\
&= \frac{3\pi}{8} + 0,
\end{aligned}$$

d'où le volume cherché :

$$\iiint\limits_D dz\ dy\ dx = 8\sqrt{2}\pi.$$