Calcul différentiel multiple

(T. G. 23)

1. (a) *Montrer que l'application* $\left\{\begin{array}{ccc}\mathbf{R}^2 & \to & \mathbf{R} \\ (a,b) & \mapsto & \left\{\begin{array}{c} ab\ln\left(a^2+b^2\right) \text{ si } \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \\ 0 \text{ si } a=b=0\end{array}\right.\end{array}\right.$ *est de classe* C^1.

   (b) *Montrer que la fonction* $\left\{\begin{array}{ccc}\mathbf{R}^2 & \to & \mathbf{R} \\ (x,y) & \mapsto & \left\{\begin{array}{c} \frac{x^2y}{x^4+y^2} \text{ si } \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \\ 0 \text{ si } x=y=0\end{array}\right.\end{array}\right.$ *admet des dérivées suivant n'importe quel vecteur mais n'est pas continue en* 0.

   (c) *Montrer que la fonction* $\left\{\begin{array}{ccc}\mathbf{R}^2 & \to & \mathbf{R} \\ (u,v) & \mapsto & \left\{\begin{array}{c} uv\frac{u^2-v^2}{u^2+v^2} \text{ si } \begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \\ 0 \text{ si } u=v=0\end{array}\right.\end{array}\right.$ *est de classe* C^1*, admet des dérivées partielles d'ordre* 2 *mais n'est pas de classe* C^2 *(*i. e. *que ses dérivées partielles d'ordre* 1 *ne sont pas toutes* C^1*).*

   (d) *Soient* $a \in \mathbf{R}^2$ *et* $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ *différentiable en* a*. Montrer que les droites tangentes en* a *dans toutes les directions sont toutes incluses le plan tangent en* a*.*

2. *Étudier les* extrema *locaux des fonctions*

   (a) $(u,v) \mapsto u^2 + (u+v-1)^2 + v^2$;

   (b) $(x,y) \mapsto x^3 - y^2 - x$;

   (c) $(a,b) \mapsto 2b^4 - 3ab^2 + b^2$.

3. *Calculer les intégrales doubles suivantes :*

   (a) $\iint_T xy\ dx\ dy$ *où* $T := \left\{(a,b) \in \mathbf{R}_+^2 \ ;\ a+b \leq 1\right\}$ *;*

   (b) $\iint_T (x+y)\ dx\ dy$ *où* T *est le triangle* $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ *;*

   (c) $\iint_{[0,2]\times[0,1]} \left(a^2+b\right)\ da\ db$ *;*

   (d) $\iint_D u^2v\ du\ dv$ *où* $D := \left\{\begin{pmatrix}r\\s\end{pmatrix} \in \mathbf{R}_+^2 \ ;\ x \leq 1 \text{ et } x+y \leq 2\right\}$ *;*

   (e) $\iint_D \frac{dx\ dy}{1+x^2+y^2}$ *où* D *est le disque unité fermé.*

4. (a) *Calculer l'aire d'une ellipse en fonction de ses demi-axes.*

   (b) *Soient* $r > 0$ *et* $\theta \in \mathbf{R}$*. Calculer l'aire délimitée par les deux segments* $O\binom{r}{0}$, $O\binom{r\operatorname{ch}\theta}{r\operatorname{sh}\theta}$ *et par l'arc d'hyperbole d'équation* $x^2 - y^2 = r^2$ *allant de* $\binom{r}{0}$ *à* $\binom{r\operatorname{ch}\theta}{r\operatorname{sh}\theta}$*.*

   (c) *Calculer le volume du prisme situé sous le plan d'équation* $x+y+z=3$ *et dont la base est le triangle situé dans le plan de cote nulle délimité par l'axe des abscisses, la première bissectrice et la droite d'abscisse* 1*.*

   (d) *Donner le barycentre et le moment d'inertie (par rapport à l'axe des cotes) de la plaque de masse* $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \mapsto \frac{\sin x}{x}$ *délimitée par le triangle* $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

   (e) *Donner le barycentre et le moment d'inertie (par rapport à l'axe des cotes) du "triangle" plein délimité par l'axe des abscisses, la parabole d'équation* $y^2 = 2x$ *et la droite d'équation* $x+y=4$*.*

   (f) *Calculer le volume délimité par les surfaces d'équations respectives* $z = x^2 + 3y^2$ *et* $z = 8 - x^2 - y^2$*.*