Comparaison locale

(T. G. 22)

Solution proposée.

1. On étudie systématiquement le rapport des deux quantités à comparer.

(a) Soit $x > 0$. On a (lorsque $x \to 0$)

$$\frac{\ln\left(1+\overbrace{2x}^{\longrightarrow 0}\right)}{x\ln x} \sim \frac{2x}{x\ln x} = \frac{2}{\ln x} \longrightarrow 0,$$

ce qui montre la comparaison

$$\ln(1+2x) = o(x\ln x).$$

(b) Soit $t > 0$. On a (lorsque $t \to \infty$) $t^2 + 3t \sim t^2$, donc (puisque $\lim_{\square\to 1}\sqrt{\square} = 1$) $\sqrt{t^2+3t} \sim \sqrt{t^2} = |t| = t$, d'où

$$\frac{\sqrt{t^2+3t}\ln\left(t^2\right)\sin t}{t\ln t} \sim \frac{t\ 2\ln t\sin t}{t\ln t} = 2\sin t = O(1),$$

ce qui montre la comparaison

$$\sqrt{t^2+3t}\ln\left(t^2\right)\sin t = O(t\ln t).$$

(c) Soit $a \neq -1$ réel. Posons $\varepsilon := -1-a$. On a (lorsque $a \to -1^-$, *i. e.* lorsque $\varepsilon \to 0^+$)

$$\frac{\ln\left(1+\frac{1}{a}\right)}{\frac{1}{1+a}} = -\varepsilon\ln\left(\frac{-\varepsilon}{-1-\varepsilon}\right) = \underbrace{\varepsilon\ln\varepsilon}_{\longrightarrow 0} - \varepsilon\underbrace{\ln(1+\varepsilon)}_{\longrightarrow 0} \longrightarrow 0,$$

d'où la comparaison

$$\ln\left(1+\frac{1}{a}\right) = o\left(\frac{1}{1+a}\right).$$

(d) Soit $s > 0$. Posons $L := -\ln s$. On a (lorsque $s \to 0$, *i. e.* lorsque $L \to \infty$)

$$\left|\frac{\ln s}{s^{-\frac{1}{s}}}\right| = \left|(\ln s)\,e^{\frac{\ln s}{s}}\right| = Le^{-Le^{L}} \leq Le^{-L} \longrightarrow 0,$$

d'où la comparaison

$$\ln s = o\left(s^{-\frac{1}{s}}\right).$$

2.

(a) Soit $a \in \left]0,\pi^2\right[$. On a les équivalences (lorsque $a \to 0$)

$$\underbrace{a(a+3)}_{\longrightarrow 3}\frac{\overbrace{\sqrt{a+3}}^{\longrightarrow\sqrt{3}}}{\sqrt{a}\,\underbrace{\sin\sqrt{a}}_{\sim\sqrt{a}}} \sim a3\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{a}\sqrt{a}} = 3\sqrt{3}.$$

(b) Soit $\theta \neq 0$ dans $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. On a les équivalences et tendances (lorsque $\theta \to 0$)

$$\frac{(1-\cos\theta)\arctan\theta}{\theta\tan\theta} \sim \frac{\frac{\theta^2}{2}\ \theta}{\theta\ \theta} = \frac{\theta}{2} \longrightarrow 0.$$

(c) Soit $q \neq 0$ dans $]-1,1[$. On a les équivalences (lorsque $q \to 0$)

$$\frac{q \ln(1+q)}{(\arcsin q)^2} \sim \frac{q\ q}{(q)^2} = 1.$$

(d) Soit $x \in \mathbf{R}$ autre que 0 et $-\frac{2}{3}$. On a les équivalences (lorsque $x \to 0$)

$$\frac{(1-e^x)(1-\cos x)}{3x^3+2x^4} \sim \frac{-x\ \frac{x^2}{2}}{x^3\ \underbrace{(3+2x)}_{\sim 3}} \sim -\frac{1}{6}.$$

(e) Soit $\psi > 0$. On a les égalités et tendance (lorsque $\psi \to 0$)

$$\sqrt[\psi]{1+\sin\psi} = \exp\frac{\ln(1+\sin\psi)}{\psi} = \exp\frac{\ln\left(1+\overbrace{\psi+o(\psi)}^{\longrightarrow 0}\right)}{\psi} = \exp\frac{\psi+o(\psi)}{\psi} = e^{1+o(1)} \longrightarrow e.$$

(f) Soit $u \in]0,\pi[$. On a les égalités (lorsque $u \to 0$)

$$\begin{aligned} \ln\frac{\sin u}{u} &= \ln\left(1 - \overbrace{\frac{u^2}{6}+o\left(u^2\right)}^{\longrightarrow 0}\right) = -\frac{u^2}{6}+o\left(u^2\right), \text{ d'où} \\ \sqrt[u^2]{\frac{\sin u}{u}} &= \exp\frac{\ln\frac{\sin u}{u}}{u^2} = \exp\frac{-\frac{u^2}{6}+o\left(u^2\right)}{u^2} = e^{-\frac{1}{6}+o(1)} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt[6]{e}}. \end{aligned}$$

(g) Soit $z > 0$. On a (lorsque $z \to \infty$)

$$\begin{aligned} \operatorname{th} z &= \frac{e^z-e^{-z}}{e^z+e^{-z}} = \frac{1-e^{-2z}}{1+e^{-2z}} = 1 - \underbrace{\frac{2e^{-2z}}{1+e^{-2z}}}_{\longrightarrow 0}, \text{ d'où} \\ \ln z \times \ln \operatorname{th} z &= \ln z\ \ln\left(1-\frac{2e^{-2z}}{1+e^{-2z}}\right) \sim \ln z\left(-\frac{2e^{-2z}}{1+e^{-2z}}\right) = \underbrace{\frac{-2\ln z}{e^{2z}}}_{\longrightarrow 0}\underbrace{\frac{1}{1+e^{-2z}}}_{\longrightarrow 1} \longrightarrow 0, \\ \text{d'où l'on déduit } (\operatorname{th} z)^{\ln z} &= e^{\ln z \times \ln \operatorname{th} z} \longrightarrow e^0 = 1. \end{aligned}$$

3. Soit $n \in \mathbf{N}$.

(a) On a les égalités et équivalence

$$\binom{n+s}{n} = \frac{1}{s!}\prod_{k=1}^{s}\underbrace{(n+k)}_{\sim n} \sim \frac{1}{s!}\prod_{k=1}^{s} n = \frac{n^s}{s!}.$$

(b) On a les égalités et équivalence

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{\ln\left(1+e^{-n^2}\right)} &= \exp\frac{\ln\left(\ln\left(1+\overbrace{e^{-n^2}}^{\longrightarrow 0}\right)\right)}{n} = \exp\frac{\ln\left(e^{-n^2}+o\left(e^{-n^2}\right)\right)}{n} \\ &= \exp\frac{\ln e^{-n^2}+\ln(1+o(1))}{n} = \exp\left(-n+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= e^{-n}e^{o(1)} \sim e^{-n}. \end{aligned}$$

(c) On a

$$\begin{aligned} n\ln\left(1+e^{-n}\right) &\sim ne^{-n} \longrightarrow 0, \text{ donc } \left(1+e^{-n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+e^{-n}\right)} \longrightarrow 1, \\ \text{d'où } \left(\frac{e^n}{1+e^{-n}}\right)^n &= \frac{e^{n^2}}{(1+e^{-n})^n} \sim e^{n^2}. \end{aligned}$$

(d) On rappelle les équivalences $\arccos c \overset{c\to 1}{\sim} \sin \arccos c = \sqrt{1-c^2} \sim \sqrt{2(1-c)}$. Puisque $\frac{n^3+1}{2+n^3} \longrightarrow 1$, on en déduit

$$\arccos \frac{n^3+1}{2+n^3} \sim \sqrt{2\left(1-\frac{n^3+1}{2+n^3}\right)} = \sqrt{\frac{2}{2+n^3}} \sim \sqrt{\frac{2}{n^3}} = \sqrt{2}n^{-\frac{3}{2}}.$$

(e) On a

$$\begin{aligned}
\ln(1-\operatorname{th} n) &= \ln\left(1-\frac{1-e^{-2n}}{1+e^{-2n}}\right) = \ln\frac{2e^{-2n}}{1+e^{-2n}} = \underbrace{\ln 2}_{=o(n)} - 2n - \underbrace{\ln\left(1+e^{-2n}\right)}_{=O(1)=o(n)} \sim -2n, \text{ d'où} \\
\operatorname{th}\frac{1}{n} \times \ln(1-\operatorname{th} n) &\sim \frac{1}{n} \times (-2n) = -2, \text{ ce qui montre } (1-\operatorname{th} n)^{\operatorname{th}\frac{1}{n}} = e^{\operatorname{th}\frac{1}{n}\times\ln(1-\operatorname{th} n)} \longrightarrow \frac{1}{e^2}.
\end{aligned}$$

4.

(a) Soit $t \geq -1$. On a (lorsque $t \to 0$)

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+t} &= (1+t)^{\frac{1}{2}} \\
&= 1+\frac{1}{2}t+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}t^2+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}t^3+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right)}{4!}t^4+o\left(t^4\right) \\
&= 1+\frac{t}{2}-\frac{t^2}{8}+\frac{t^3}{16}-\frac{5t^4}{128}+o\left(t^4\right), \text{ d'où (on peut composer puisque } -t \longrightarrow 0) \\
\sqrt{1-t}+\sqrt{1+t} &= \left(1+\frac{(-t)}{2}-\frac{(-t)^2}{8}+\frac{(-t)^3}{16}-\frac{5(-t)^4}{128}\right)+\left(1+\frac{t}{2}-\frac{t^2}{8}+\frac{t^3}{16}-\frac{5t^4}{128}\right)+o\left(t^4\right) \\
&= 2-\frac{t^2}{4}-\frac{5t^4}{64}+o\left(t^4\right).
\end{aligned}$$

(b) Soit $t > -1$. On a (lorsque $t \to 0$)

$$\begin{aligned}
(\ln(1+t))^2 &= \left(t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+o\left(t^3\right)\right)^2 = t^2\left(1-\frac{t}{2}+\frac{t^2}{3}+o\left(t^2\right)\right)^2 \\
&= t^2\left(1+2\left(-\frac{t}{2}+\frac{t^2}{3}\right)+\left(\frac{t}{2}\right)^2+o\left(t^2\right)\right) \\
&= t^2-t^3+\frac{11}{12}t^4+o\left(t^4\right).
\end{aligned}$$

(c) Soit $t \in \mathbf{R}$. On a (lorsque $t \to 0$)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t^2+2t+2} &= \frac{1}{2}\frac{1}{1+\underbrace{\left(t+\frac{t^2}{2}\right)}_{\longrightarrow 0}} = \frac{1}{2}\left(1-\left(t+\frac{t^2}{2}\right)+\left(t+\frac{t^2}{2}\right)^2-(t)^3+o\left(t^3\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}-\frac{t}{2}-\frac{t^2}{4}+\frac{t^2}{2}\left(1+\frac{t}{2}\right)^2-\frac{t^3}{2}+o\left(t^3\right) \\
&= \frac{1}{2}-\frac{t}{2}-\frac{t^2}{4}+\frac{t^2}{2}(1+t)-\frac{t^3}{2}+o\left(t^3\right) \\
&= \frac{1}{2}-\frac{t}{2}+\frac{t^2}{4}+o\left(t^3\right), \text{ d'où} \\
\frac{t^2+1}{t^2+2t+2} &= \left(1+t^2\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{t}{2}+\frac{t^2}{4}+o\left(t^3\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}-\frac{t}{2}+\frac{3}{4}t^2-\frac{t^3}{2}+o\left(t^2\right).
\end{aligned}$$

(d) Soit $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. On a (lorsque $t \to 0$)

$$\begin{aligned}
\ln \frac{1}{\cos t} &= -\ln \cos t = -\ln\left(1 \underbrace{- \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} + o\left(t^4\right)}_{\longrightarrow 0}\right) \\
&= -\left(\left(-\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24}\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{t^2}{2}\right)^2 + o\left(t^4\right)\right) \\
&= \frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{24} + \frac{t^4}{8} + o\left(t^4\right) \\
&= \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{12} + o\left(t^4\right).
\end{aligned}$$

(e) Soit $t \in]-1, 2[$. On a (lorsque $t \to 0$)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(t+1)(t-2)} &= \frac{1}{1+t}\frac{1}{-2}\frac{1}{1 \underbrace{- \frac{t}{2}}_{\longrightarrow 0}} \\
&= -\frac{1}{2}\left(1 - t + t^2 - t^3 + o\left(t^3\right)\right)\left(1 + \frac{t}{2} + \left(\frac{t}{2}\right)^2 + \left(\frac{t}{2}\right)^3 + o\left(t^3\right)\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{t}{2} + \frac{3t^2}{4} - \frac{5t^3}{8} + o\left(t^3\right)\right) \\
&= -\frac{1}{2} + \frac{t}{4} - \frac{3t^2}{8} + \frac{5t^3}{16} + o\left(t^3\right)
\end{aligned}$$

(f) Soit $t > 0$. On a (lorsque $t \to \infty$)

$$\begin{aligned}
\operatorname{argsh} t - \ln t &= \ln\left(t + \sqrt{1+t^2}\right) - \ln t = \ln\left(1 + \sqrt{1 + \underbrace{\frac{1}{t^2}}_{\longrightarrow 0}}\right) \\
&= \ln\left(1 + 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{t^2} - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{t^2}\right)^2 + o\left(\frac{1}{t^4}\right)\right) \\
&= \ln 2 + \ln\left(1 + \underbrace{\frac{1}{4t^2} - \frac{1}{16t^4} + o\left(t^4\right)}_{\longrightarrow 0}\right) \\
&= \ln 2 + \left(\frac{1}{4t^2} - \frac{1}{16t^4}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4t^2}\right)^2 + o\left(\frac{1}{t^4}\right) \\
&= \ln 2 + \frac{1}{4t^2} - \frac{3}{32t^4} + o\left(\frac{1}{t^4}\right).
\end{aligned}$$

(g) Soit $t>-2$. On a $\frac{1+t}{t+2}=1-\frac{1}{t+2}$, donc

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\left(\arccos\frac{1+t}{t+2}\right) &= -\frac{1}{\sqrt{1-\left(1-\frac{1}{t+2}\right)^2}}\frac{1}{(t+2)^2} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{(t+2)^2-((t+2)-1)^2}}\frac{1}{t+2} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2t+3}}\frac{1}{t+2} \\
&= -\frac{1}{2\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2t}{3}}}\frac{1}{1+\frac{t}{2}} \\
&= -\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{2}\frac{2t}{3}+o(t)\right)\left(1-\frac{t}{2}+o(t)\right) \\
&= -\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(1-\frac{5t}{6}+o(t)\right)\text{, d'où en intégrant} \\
\arccos\frac{1+t}{t+2} &= \arccos\frac{1+0}{0+2}-\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(t-\frac{5t^2}{12}+o\left(t^2\right)\right) \\
&= \frac{\pi}{3}-\frac{t}{2\sqrt{3}}+\frac{5t^2}{24\sqrt{3}}+o\left(t^2\right).
\end{aligned}$$

5. *Donner sens et calculer les limites des quantités suivantes :*

(a) Soit $x\in\mathbf{R}^*$. On a (lorsque $x\to 0$)

$$\begin{aligned}
a^x-b^x &= e^{x\ln a}-e^{x\ln b}=(1+x\ln a+o(x))-(1+x\ln b+o(x))=x\ln\frac{a}{b}+o(x), \\
\text{d'où } \frac{a^x-b^x}{x} &= \ln\frac{a}{b}+o(1)\longrightarrow\ln\frac{a}{b}.
\end{aligned}$$

(b) Soit $t\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$. Posons $\tau:=\tan t$. On a (lorsque $t\to\frac{\pi}{4}$, *i. e.* lorsque $\tau\to 1$)

$$\begin{aligned}
\tan 2t\times\ln\tan t &= \frac{2\tau}{1-\tau^2}\ln\left(1+\underbrace{\tau-1}_{\longrightarrow 0}\right)\sim\frac{2\tau}{1-\tau^2}(\tau-1)=\frac{-2\tau}{1+\tau}\sim -1\text{, d'où} \\
(\tan t)^{\tan 2t} &= e^{\tan 2t\times\ln\tan t}\longrightarrow\frac{1}{e}.
\end{aligned}$$

(c) Soit $t\in\mathbf{R}^*$. On a (lorsque $t\to 0$)

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha^t+\beta^t}{2} &= \frac{e^{t\ln\alpha}+e^{t\ln\beta}}{2}=\frac{(1+t\ln\alpha+o(t))+(1+t\ln\beta+o(t))}{2}=1+t\ln\sqrt{\alpha\beta}+o(t)\text{, d'où} \\
\sqrt[t]{\frac{\alpha^t+\beta^t}{2}} &= e^{\frac{1}{t}\ln\frac{\alpha^t+\beta^t}{2}}=e^{\frac{1}{t}\ln\left(1+\underbrace{t\ln\sqrt{\alpha\beta}+o(t)}_{\longrightarrow 0}\right)}=e^{\frac{1}{t}\left(t\ln\sqrt{\alpha\beta}+o(t)\right)}=e^{\ln\sqrt{\alpha\beta}+o(1)}\longrightarrow\sqrt{\alpha\beta}.
\end{aligned}$$

(d) Soit $s>-1$ non nul. On a (lorsque $s\to 0$)

$$\frac{1}{s}-\frac{1}{\ln(1+s)}=\frac{1}{s}-\frac{1}{s-\frac{s^2}{2}+o(s^2)}=\frac{s-\frac{s^2}{2}+o\left(s^2\right)-s}{s\left(s-\frac{s^2}{2}+o(s^2)\right)}=\frac{-\frac{s^2}{2}+o\left(s^2\right)}{s\left(s+o(s)\right)}\sim\frac{-\frac{s^2}{2}}{s\ s}=-\frac{1}{2}.$$

(e) Soit $\gamma>-1$. On a (lorsque $\gamma\to 0$)

$$\begin{aligned}
(1+\gamma)^{\frac{1}{\gamma}} &= e^{\frac{\ln(1+\gamma)}{\gamma}}=e^{\frac{\gamma-\frac{\gamma^2}{2}+o\left(\gamma^2\right)}{\gamma}}=e^{1-\frac{\gamma}{2}+o(\gamma)}=ee^{\overbrace{-\frac{\gamma}{2}+o(\gamma)}^{\longrightarrow 0}}=e\left(1-\frac{\gamma}{2}+o(\gamma)\right)\text{, d'où} \\
\frac{(1+\gamma)^{\frac{1}{\gamma}}-e}{\gamma} &= \frac{\left(e-\frac{e\gamma}{2}+o(\gamma)\right)-e}{\gamma}=-\frac{e}{2}+o(1)\longrightarrow -\frac{e}{2}.
\end{aligned}$$