Comparaison locale

(T. G. 22)

1. *Comparer les quantités suivantes au voisinage des points indiqués :*
   (a) $x\ln x$ *et* $\ln(1+2x)$ *lorsque* $x \to 0$ *;*
   (b) $t\ln t$ *et* $\sqrt{t^2+3t}\ln\left(t^2\right)\sin t$ *lorsque* $t \to \infty$ *;*
   (c) $\frac{1}{1+a}$ *et* $\ln\left(1+\frac{1}{a}\right)$ *lorsque* $a \to -1^-$ *;*
   (d) $s^{-\frac{1}{s}}$ *et* $\ln s$ *lorsque* $s \to 0$.
2. *Donner sens et calculer les limites des quantités suivantes lorsque le symbole muet tend vers* 0 *:*
   (a) $a\,(a+3)\,\frac{\sqrt{a+3}}{\sqrt{a}\sin\sqrt{a}}$ *;*
   (b) $\frac{(1-\cos\theta)\arctan\theta}{\theta\tan\theta}$ *;*
   (c) $\frac{q\ln(1+q)}{(\arcsin q)^2}$ *;*
   (d) $\frac{(1-e^x)(1-\cos x)}{3x^3+2x^4}$ *;*
   (e) $\sqrt[\psi]{1+\sin\psi}$ *;*
   (f) $\sqrt[u^2]{\frac{\sin u}{u}}$ *;*
   (g) $(\operatorname{th} z)^{\ln z}$.
3. *Donner des équivalents simples des quantités suivantes lorsque* $n \to \infty$ *:*
   (a) $\binom{n+s}{n}$ *(où* s *est fixé dans* $\mathbf{N}$*) ;*
   (b) $\sqrt[n]{\ln\left(1+e^{-n^2}\right)}$ *;*
   (c) $\left(\frac{e^n}{1+e^{-n}}\right)^n$ *;*
   (d) $\arccos\frac{n^3+1}{2+n^3}$ *;*
   (e) $(1-\operatorname{th} n)^{\operatorname{th}\frac{1}{n}}$.
4. *Calculer les développements limités suivants :*
   (a) $\sqrt{1-t}+\sqrt{1+t}$ *à l'ordre* 4 *lorsque* $t \to 0$ *;*
   (b) $(\ln(1+t))^2$ *à l'ordre* 4 *lorsque* $t \to 0$ *;*
   (c) $\frac{t^2+1}{t^2+2t+2}$ *à l'ordre* 3 *lorsque* $t \to 0$ *;*
   (d) $\ln\frac{1}{\cos t}$ *à l'ordre* 4 *lorsque* $t \to 0$ *;*
   (e) $\frac{1}{(t+1)(t-2)}$ *à l'ordre* 3 *lorsque* $t \to 0$ *;*
   (f) $\operatorname{argsh} t-\ln t$ *à l'ordre* 4 *lorsque* $t \to \infty$ *;*
   (g) $\arccos\frac{1+t}{t+2}$ *à l'ordre* 2 *lorsque* $t \to 0$.
5. *Donner sens et calculer les limites des quantités suivantes :*
   (a) $\frac{a^x-b^x}{x}$ *lorsque* $x \to 0^+$ *(où* a *et* b *sont fixés dans* $\mathbf{R}_+^*$*) ;*
   (b) $(\tan t)^{\tan 2t}$ *lorsque* $t \to \frac{\pi}{4}$ *;*
   (c) $\sqrt[t]{\frac{\alpha^t+\beta^t}{2}}$ *lorsque* $t \to 0$ *(où* α *et* β *sont fixés dans* $\mathbf{R}_+^*$*) ;*
   (d) $\frac{1}{s}-\frac{1}{\ln(1+s)}$ *lorsque* $s \to 0$ *;*
   (e) $\frac{(1+\gamma)^{\frac{1}{\gamma}}-e}{\gamma}$ *lorsque* $\gamma \to 0$.