Intégration segmentaire

(T. G. 21)

1. On commence par vérifier que l'intégrande est bien continue par morceaux sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (le dénominateur reste bien strictement positif car d'une part il est positif d'autre part ses termes ne peuvent s'annuler en même temps).

   La somme des intégrales cherchée vaut $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin + \cos}{\cos + \sin} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 = \frac{\pi}{2}$. Par ailleurs, reparamétrer par $u := \frac{\pi}{2} - t$ donne

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t \; dt}{\cos t + \sin t} = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\ (-du)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right)} = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\cos u \; du}{\sin u + \cos u} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos}{\cos + \sin},$$

   ce qui montre que les intégrales cherchées sont égales. Elles valent donc chacune la moitié de leur somme, à savoir $\frac{\pi}{4}$.

2. Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$, $(u, v) \in C^1(I, S)^2$ et $f \in C^0_{\text{p. m.}}(S, \mathbf{K})$. En notant F une primitive de f, on a pour tout $t \in I$ les égalités

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{u(t)}^{v(t)} f = \frac{\partial}{\partial t}\left(F(v(t)) - F(u(t))\right) = F'(v(t)) \frac{\partial v(t)}{\partial t} - F'(v(t)) \frac{\partial u(t)}{\partial t} = f(v(t))\, v'(t) - f(u(t))\, u'(t).$$

   Il suffit d'appliquer ce résultat aux intégrales qui suivent (dont on aura au préalable pris soin de montrer le caractère continu par morceaux des intégrandes).

   (a) On a $\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{t^2} \cos = \cos\left(t^2\right) 2t$.

   (b) On a $\frac{\partial}{\partial a} \int_{\sin a}^{a^2} (1 + y)\, dy = \left(1 + a^2\right) 2a - (1 + \sin a) \cos a$.

   (c) On a $\frac{\partial}{\partial d} \int_d^1 \sqrt{1 - s^2} ds = -\sqrt{1 - d^2}$.

   (d) On a $\frac{\partial}{\partial r} \int_{\frac{1}{r}}^r \frac{dn}{n} = \frac{1}{r} - \frac{1}{\frac{1}{r}}\left(-\frac{1}{r^2}\right) = \frac{2}{r}$.

   (e) On a $\frac{\partial}{\partial c} \int_{\sqrt{c}}^{2\sqrt{c}} \sin = \frac{\sin\left(2\sqrt{c}\right)}{\sqrt{c}} - \frac{\sin\left(\sqrt{c}\right)}{2\sqrt{c}}$.

3. Pour chacune des intégrale qui suit, il faut bien vérifier que l'intégrande est continue par morceaux sur le segment d'intégration. En guise de sanity check, on comparera les résultats trouvés par différentes méthodes et l'on vérifiera si possible la compatibilité des signes.

   (a) Une primitive de $x \mapsto 3x^2 + 1$ étant $y \mapsto y^3 + y$, on peut calculer

$$\int_2^3 \left(3t^2 + 1\right) dt = \left[t^3 + t\right]_{t=2}^3 = \left(3^3 + 3\right) - \left(2^3 + 2\right) = 30 - 10 = 20.$$

   (b) On revient à la définition de $|\mathrm{Id}|$ sur $\mathbf{R}^+$ et $\mathbf{R}^-$ respectivement :

$$\int_{-1}^2 |g| \ \sqrt[3]{g}\ dg \overset{\text{Chasles}}{=} \int_{-1}^0 |g|\, g^{\frac{1}{3}} dg + \int_0^2 |g|\, g^{\frac{1}{3}} dg \underset{\text{de } |\mathrm{Id}|}{\overset{\text{définition}}{=}} \int_{-1}^0 -g^{\frac{4}{3}} dg + \int_0^2 g^{\frac{4}{3}} dg$$

$$= -\left[\frac{g^{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}}\right]_{g=-1}^0 + \left[\frac{g^{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}}\right]_{g=0}^2 = -\left(\frac{0^{\frac{7}{3}} - (-1)^{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}}\right) + \left(\frac{2^{\frac{7}{3}} - 0^{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}}\right) = \frac{3}{7}\left(4\sqrt[3]{2} - 1\right).$$

   (c) On utilise plusieurs IPPs successives afn de tuer le polynôme (comme ça, pas d'intégrales à calculer, que des crochets) :

$$\left|\begin{array}{ccc} q^2 & & e^q \\ & \searrow^{+} & \\ 2q & & e^q \\ & \searrow^{-} & \\ 2 & & e^q \\ & \searrow^{+} & \\ 0 & \cdots^{-} & e^q \end{array}\right| \quad \text{signifie} \quad \int_0^1 q^2 e^q dq = \begin{array}{c} \left[q^2 e^q\right]_0^1 - \left[2q e^q\right]_0^1 + \left[2e^q\right]_0^1 - \int_0^1 0 e^q dq \\ = e - 2e + 2(e - 1) = e - 2. \end{array}$$

(d) *Idée 1* : on passe en complexes pour n'avoir à intégrer que de l'exponentielle :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2\rho}\cos\rho\; d\rho &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2\rho}\,\mathrm{Re}\left(e^{i\rho}\right) d\rho \\
&\underset{\substack{\text{pour tout réel } \lambda \\ \text{et pour tout } z\in\mathbf{C}}}{\overset{\mathrm{Re}(\lambda z)=\lambda\,\mathrm{Re}\, z}{=}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{Re}\left(e^{2\rho}e^{i\rho}\right) d\rho \\
&\underset{\substack{\text{pour toute fonction } f \\ \text{continue complexe}}}{\overset{\mathrm{Re}(\int f)=\int(\mathrm{Re}\, f)}{=}} \mathrm{Re}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{(2+i)\rho} d\rho \\
&= \mathrm{Re}\left[\frac{e^{(2+i)\rho}}{2+i}\right]_{\rho=0}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \mathrm{Re}\,\frac{e^{\pi+i\frac{\pi}{2}}-1}{2+i} \\
&\underset{\text{conjugué}}{\overset{\text{complexe}}{=}} \mathrm{Re}\,\frac{\left(ie^{\pi}-1\right)(2-i)}{2^2+1^2} \\
&= \frac{e^{\pi}-2}{5}.
\end{aligned}$$

Idée 2 : on utilise deux IPPs afin d'obtenir une équation sur l'intégrale cherchée (appelons-la I) :

$$\left\downarrow\begin{array}{ccc} e^{2\rho} & & \cos\rho \\ & \searrow^{+} & \\ 2e^{2\rho} & & \sin\rho \\ & \searrow^{-} & \\ 4e^{2\rho} & \cdots^{+} & -\cos\rho \end{array}\right\uparrow \text{ donne } \begin{array}{c} I = \left[e^{2\rho}\sin\rho\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[2e^{2\rho}\left(-\cos\rho\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4e^{2\rho}\left(-\cos\rho\right) d\rho, \\ \text{d'où } I = \left(e^{\pi}-0\right) + 2\left(0-1\right) - 4I, \\ i.\ e.\ I = \frac{e^{\pi}-2}{5}. \end{array}$$

(e) On utilise une IPP $\left\downarrow\begin{array}{ccc} \arcsin t & & dt \\ & \searrow^{+} & \\ \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} & \cdots^{-} & t \end{array}\right\uparrow$ pour se ramener à des fonctions plus simples, ce qui donne

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin t\; dt &= \left[t\ \arcsin t\right]_{t=0}^{\frac{1}{2}} + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{-t\; dt}{\sqrt{1-t^2}} \\
&= \left(\frac{1}{2}\frac{\pi}{6}-0\right) + \int_{t=0}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}\frac{d\boxed{1-t^2}}{\sqrt{\boxed{1-t^2}}} \\
&\overset{\square:=1-t^2}{=} \frac{\pi}{12} + \int_{\boxed{1-0^2}}^{\boxed{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}} \frac{d\square}{2\sqrt{\square}} \\
&= \frac{\pi}{12} + \int_{\square=1}^{\frac{3}{4}} d\left(\sqrt{\square}\right) \\
&= \frac{\pi}{12} + \left[\sqrt{\square}\right]_{\square=1}^{\frac{3}{4}} \\
&= \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1.
\end{aligned}$$

(f) *Idée 1* : on linéarise l'intégrande, ce qui fait apparaître des dérivées logarithmiques :

$$\begin{aligned}
\int_2^7 \frac{dt}{1-t^2} &= \int_2^7 \left(\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}\right)\frac{dt}{2} \\
&\underset{v:=t-1}{\overset{u:=1+t}{=}} \frac{1}{2}\int_{2+1}^{7+1}\frac{du}{u} - \frac{1}{2}\int_{2-1}^{7-1}\frac{dv}{v} \\
&= \left[\frac{\ln}{2}\right]_3^8 - \left[\frac{\ln}{2}\right]_1^6 \\
&= \frac{\left(3\ln 2-\ln 3\right)-\left(\ln 2+\ln 3-0\right)}{2} \\
&= \ln 2-\ln 3.
\end{aligned}$$

Idée 2 : on reparamètre $u := \frac{1}{t}$ (d'où $dt = -\frac{du}{u^2}$) pour se ramener sur l'intervalle $]-1, 1[$ où l'on sait que $\operatorname{argth}' = \frac{1}{1-\mathrm{Id}^2}$ et que $\operatorname{argth} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\mathrm{Id}}{1-\mathrm{Id}}$:

$$\begin{aligned}
\int_2^7 \frac{dt}{1-t^2} &\overset{u:=\frac{1}{t}}{=} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{7}} \frac{-\frac{du}{u^2}}{1-\frac{1}{u^2}} = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{7}} \frac{du}{1-u^2} \\
&= \left[\operatorname{argth} u\right]_{u=\frac{1}{2}}^{\frac{1}{7}} = \left[\frac{1}{2} \ln \frac{1+u}{1-u}\right]_{u=\frac{1}{2}}^{\frac{1}{7}} \\
&= \frac{1}{2} \ln \frac{1+\frac{1}{7}}{1-\frac{1}{7}} - \frac{1}{2} \ln \frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{8}{6} \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2} \ln \left(\left(\frac{2}{3}\right)^2\right) \\
&= \ln 2 - \ln 3.
\end{aligned}$$

Idée 3 : on reconnaît la dérivée de $\operatorname{argcoth}' = \frac{1}{1-\mathrm{Id}^2}$ sur $]1, \infty[$ et l'on s'y rappelle de l'égalité $\operatorname{argcoth} = \frac{1}{2} \ln \frac{\mathrm{Id}+1}{\mathrm{Id}-1}$, ce qui donne directement

$$\int_2^7 \frac{dt}{1-t^2} = \left[\frac{1}{2} \ln \frac{\mathrm{Id}+1}{\mathrm{Id}-1}\right]_2^7 = \frac{1}{2} \ln \frac{8}{6} \frac{1}{3} = \ln 2 - \ln 3.$$

(g) On reconnaît la dérivée de ln, ce qui permet de reparamétrer :

$$\int_1^2 \frac{(\ln \varphi)^3}{\varphi} d\varphi = \int_1^2 \boxed{\ln \varphi}^3 d\boxed{\ln \varphi} = \int_{\boxed{\ln 1}}^{\boxed{\ln 2}} \square^3 d\square = \left[\frac{\square^4}{4}\right]_{\square=0}^{\ln 2} = \frac{(\ln 2)^4}{4}.$$

On aurait également pu directement primitiver

$$\int_1^2 \frac{(\ln \varphi)^3}{\varphi} d\varphi = \int_1^2 d\left(\frac{(\ln \varphi)^4}{4}\right) = \frac{(\ln 2)^4}{4} - \frac{(\ln 1)^4}{4} = \frac{(\ln 2)^4}{4}.$$

(h) On utilise une IPP $\left\downarrow \begin{array}{ccc} \arccos t & & dt \\ & \searrow^{+} & \\ \frac{-dt}{\sqrt{1-t^2}} & \cdots^{-} & t \end{array} \right\uparrow$ pour se ramener à des fonctions plus simples, ce qui donne (le calcul fait apparaître la même intégrale qu'à la question 3e)

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \arccos t \, dt &= \left[t \ \arccos t\right]_{t=0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} + \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{t \ dt}{\sqrt{1-t^2}} \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\pi}{4} - 0\right) - \int_{t=0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} d\sqrt{1-t^2} \\
&= \frac{\pi}{4\sqrt{2}} - \left[\sqrt{1-t^2}\right]_{t=0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \\
&= \frac{\pi}{4\sqrt{2}} + 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

(i) On reconnaît la dérivée de sin, ce qui permet de reparamétrer :

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos}{\sin^2} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\boxed{\sin t}}{\boxed{\sin t}^2} = \int_{\boxed{\sin \frac{\pi}{4}}}^{\boxed{\sin \frac{\pi}{2}}} \frac{d\square}{\square^2} = \left[-\frac{1}{\square}\right]_{\square=\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} = \sqrt{2} - 1.$$

On aurait également pu directement primitiver

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos}{\sin^2} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{-1}{\sin}\right)' = \frac{-1}{\sin \frac{\pi}{2}} - \frac{-1}{\sin \frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} - 1.$$

(j) On procède comme à la question 3f : ou bien on linéarise l'intégrande, ou bien on reconnaît tout de suite une arg-tangente hyperbolique :

$$\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{5}} \frac{dt}{1-t^2} = \left[\frac{1}{2}\ln\frac{1+t}{1-t}\right]_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}\frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{6}{4}\frac{4}{2}\right) = \frac{\ln 3}{2}.$$

(k) On utilise une IPP $\left\downarrow\begin{array}{ccc}\arctan t & & dt \\ & \searrow^{+} & \\ \frac{dt}{1+t^2} & \cdots^{-} & t\end{array}\right\uparrow$ pour se ramener à des fonctions plus simples, ce qui donne

$$\begin{aligned}
\int_{-\sqrt{3}}^{1} \arctan t\ dt &= [t\ \arctan t]_{-\sqrt{3}}^{1} - \int_{-\sqrt{3}}^{1} \frac{t\ dt}{1+t^2} \\
&= \left(1\frac{\pi}{4} - \sqrt{3}\frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2}\int_{t=-\sqrt{3}}^{1} \frac{d\boxed{1+t^2}}{\boxed{1+t^2}} \\
&= \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{2}\int_{t=-\sqrt{3}}^{1} d\left(\ln\left(1+t^2\right)\right) \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\left[\ln\left(1+t^2\right)\right]_{t=-\sqrt{3}}^{1} \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\left(\ln 2 - \ln 4\right) \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{\sqrt{3}} + \frac{\ln 2}{2}.
\end{aligned}$$

(l) Notons $\binom{\lambda}{\mu} := \binom{18}{42}$. Mettons le trinôme sous la racine sous forme canonique : on a pour tout $v \in [\lambda, \mu]$ les égalités

$$\begin{aligned}
(v-42)(18-v) &= -v^2 + (\mu+\lambda)v - \mu\lambda \\
&= \left(\frac{\mu+\lambda}{2}\right)^2 - \mu\lambda - \left(v - \frac{\mu+\lambda}{2}\right)^2 \\
&= \frac{\mu^2+\lambda^2+2\lambda\mu-4\mu\lambda}{4} - \left(v - \frac{\mu+\lambda}{2}\right)^2 \\
&= \left(\frac{\mu-\lambda}{2}\right)^2 - \left(v - \frac{\mu+\lambda}{2}\right)^2.
\end{aligned}$$

Cela invite à un premier reparamétrage $w =: v - \frac{\mu+\lambda}{2}$, ce qui donne

$$\int_{18}^{42} \sqrt{(v-42)(18-v)}dv = \int_{18}^{42} \sqrt{12^2 - (v-30)^2}dv \overset{w:=v-30}{=} \int_{-12}^{12} \sqrt{12^2 - w^2}dw,$$

puis à un second reparamétrage $x := \frac{w}{12}$ (d'où $dw = 12dx$), ce qui donne

$$\int_{-12}^{12} \sqrt{12^2 - w^2}dw = \int_{-1}^{1} 12\sqrt{1-x^2}12dx = 144 \underbrace{\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx}_{\substack{\text{aire du demi-disque unité} \\ \text{(presque) calculée en cours : } \frac{\pi}{2}}} = 72\pi.$$

Remarque. Le cas général donnerait

$$\int_{\lambda}^{\mu} \sqrt{(T-\lambda)(\mu-T)}dT = \frac{(\mu-\lambda)^2\pi}{8},$$

ce qui ne dépend que de la différence $\mu - \lambda$: cette intégrale mesure en effet l'aire "positive" délimitée par le graphe de tout trinôme de coefficient dominant -1 dont des racines sont espacées de $\mu - \lambda$.

(m) On reparamètre $R := \sqrt[3]{V}$, d'où $dR = d\left(V^{\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{3}V^{-\frac{2}{3}}dV = \frac{dV}{3R^2}$, ce qui donne

$$\int_{V=8}^{27} \ln\left(\sqrt[3]{V}-1\right) dV = \int_{R=\sqrt[3]{8}}^{\sqrt[3]{27}} \ln(R-1)\, 3R^2 dR.$$

On utilise ensuite une IPP pour tuer le logarithme $\left\downarrow \begin{array}{ccc} \ln(R-1) & & 3R^2dR \\ & \searrow^{+} & \\ \frac{dR}{R-1} & \cdots^{-} & R^3-1 \end{array} \right\uparrow$ (la constante d'intégration va nous servir), ce qui donne

$$\int_2^3 \ln(R-1)\, 3R^2 dR = \left[\ln(R-1)\left(R^3-1\right)\right]_{R=2}^3 - \int_2^3 \frac{dR}{R-1}\left(R^3-1\right).$$

Or on connaît $\frac{R^3-1}{R-1} = R^2+R+1$, de sorte que l'intégrale vaut

$$\int_2^3 \left(R^2+R+1\right) dR = \left[\frac{R^3}{3}+\frac{R^2}{2}+R\right]_2^3 = \left(9+\frac{9}{2}+3\right) - \left(\frac{8}{3}+2+2\right).$$

On en déduit l'intégrale cherchée :

$$(\ln 2)\left(3^3-1\right) - 0 - \left(8+\frac{27-16}{6}\right) = \frac{26}{3}\ln 2 - \frac{59}{6}.$$

(n) On utilise une IPP $\left\downarrow \begin{array}{ccc} \operatorname{argsh} t & & dt \\ & \searrow^{+} & \\ \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} & \cdots^{-} & t \end{array} \right\uparrow$ pour se ramener à des fonctions plus simples, ce qui donne

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{4}{3}} \operatorname{argsh} t \; dt &= [t \;\operatorname{argsh} t]_{t=0}^{\frac{4}{3}} - \int_0^{\frac{4}{3}} \frac{t\; dt}{\sqrt{1+t^2}} \\
&= \left(\frac{4}{3}\ln\left(\frac{4}{3}+\sqrt{1+\left(\frac{4}{3}\right)^2}\right) - 0\right) - \frac{1}{2}\int_{t=0}^{\frac{4}{3}} \frac{d\,\boxed{1+t^2}}{\sqrt{\boxed{1+t^2}}} \\
&\overset{\square:=1+t^2}{=} \frac{4}{3}\ln\left(\frac{4}{3}+\frac{\sqrt{3^2+4^2}}{3}\right) - \int_{\boxed{1+0^2}}^{\boxed{1+\left(\frac{4}{3}\right)^2}} \frac{d\square}{2\sqrt{\square}} \\
&= \frac{4}{3}\ln\left(\frac{4}{3}+\frac{5}{3}\right) - \int_{\square=1}^{\left(\frac{5}{3}\right)^2} d\left(\sqrt{\square}\right) \\
&= \frac{4\ln 3}{3} - \left(\sqrt{\left(\frac{5}{3}\right)^2} - \sqrt{1}\right) \\
&= \frac{4\ln 3 - 2}{3}.
\end{aligned}$$

(o) L'intégrande se factorise, ce qui fait apparaître un polynôme en u^2+2 ainsi que l'élément $d\left(u^2+2\right)$:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left(u^4+4u^2+1\right)^2\left(u^3+2u\right) du &= \int_0^1 \left(\boxed{u^2+2}^2-3\right)^2 \boxed{u^2+2}\frac{d\,\boxed{u^2+2}}{2} \\
&\overset{\square:=u^2+2}{=} \int_{\boxed{0^2+2}}^{\boxed{1^2+2}} \left(\square^2-3\right)^2 \square \frac{d\square}{2} \\
&= \int_{\square=2}^{3} \left(\square^2-3\right)^2 \frac{d\left(\square^2-3\right)}{4}.
\end{aligned}$$

À ce stade là, on pourrait procéder de même en reparamétrant ; afin de varier la solution, on choisit de directement primitiver :

$$\begin{aligned}\int_2^3 \left(\square^2-3\right)^2 \frac{d\left(\square^2-3\right)}{4} &= \frac{1}{12}\int_{\square=2}^3 d\left(\left(\square^2-3\right)^3\right)\\ &= \frac{\left(3^2-3\right)^3-\left(2^2-3\right)^3}{12}\\ &= \frac{6^3-1}{12}=\frac{215}{12}.\end{aligned}$$

(p) On reparamètre $r:=\sqrt{1+\psi}$, d'où $dr=\frac{\frac{1}{2}d\psi}{\sqrt{1+\psi}}$ et $d\psi=2rdr$, ce qui donne

$$\begin{aligned}\int_3^8 \frac{d\psi}{\psi\sqrt{1+\psi}} &= \int_{\sqrt{1+3}}^{\sqrt{1+8}} \frac{2rdr}{\left(r^2-1\right)r}\\ &= \int_2^3\left(\frac{1}{r-1}-\frac{1}{r+1}\right)dr\\ &= \left[\ln\left(r-1\right)\right]_{r=2}^3-\left[\ln\left(r+1\right)\right]_{r=2}^3\\ &= \ln 3-\ln 2.\end{aligned}$$

(q) On utilise une IPP $\left\downarrow\begin{array}{ccc}\operatorname{argch} t & & dt\\ & \searrow^{+} & \\ \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} & \cdots^{-} & t\end{array}\right\uparrow$ pour se ramener à des fonctions plus simples, ce qui donne

$$\begin{aligned}\int_1^{\frac{13}{12}}\operatorname{argch} t\ dt &= \left[t\ \operatorname{argch} t\right]_{t=1}^{\frac{13}{12}}-\int_1^{\frac{13}{12}}\frac{t\ dt}{\sqrt{t^2-1}}\\ &= \left(\frac{13}{12}\ln\left(\frac{13}{12}+\sqrt{\left(\frac{13}{12}\right)^2-1}\right)-0\right)-\frac{1}{2}\int_{t=1}^{\frac{13}{12}}\frac{d\boxed{t^2-1}}{\sqrt{\boxed{t^2-1}}}\\ &\overset{\square:=t^2-1}{=} \frac{13}{12}\ln\left(\frac{13}{12}+\frac{\sqrt{169-144}}{12}\right)-\frac{1}{2}\int_{\boxed{1^2-1}}^{\boxed{\left(\frac{13}{12}\right)^2-1}}\frac{d\square}{\sqrt{\square}}\\ &= \frac{13}{12}\ln\left(\frac{13}{12}+\frac{5}{12}\right)-\int_{\square=0}^{\left(\frac{5}{12}\right)^2} d\left(\sqrt{\square}\right)\\ &= \frac{13}{12}\ln\frac{3}{2}-\left(\sqrt{\left(\frac{5}{12}\right)^2}-\sqrt{0}\right)\\ &= \frac{13\left(\ln 3-\ln 2\right)-5}{12}.\end{aligned}$$

★ Attention, notre IPP n'est pas valable car le facteur dérivé n'est pas C^1 sur $\left[1,\frac{13}{12}\right]$ à cause de la limite infinie en 1. (On voit ce problème se prolonger lorsque l'on intègre $\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Id}^2-1}}$ qui n'est pas $C^0_{\text{p. m.}}$ sur $\left[1,\frac{13}{12}\right]$.) Pour contourner cette difficulté, invoquons un $\varepsilon>0$ et remplaçons dans tout ce qui précède la borne inférieure 1 par $1+\varepsilon$. En reprenant et réajustant le calcul ci-dessus, on obtient l'égalité

$$\int_{1+\varepsilon}^{\frac{13}{12}}\operatorname{argch} t\ dt=\frac{13\left(\ln 3-\ln 2\right)-5}{12}-\left(1+\varepsilon\right)\operatorname{argch}\left(1+\varepsilon\right)+\sqrt{\varepsilon^2+2\varepsilon}.$$

Lorsque $\varepsilon\to 0$, le membre de droite tend vers la valeur $\frac{13(\ln 3-\ln 2)-5}{12}$ trouvée précédemment ; l'intégrande étant par ailleurs C^1 sur $\left[1,\frac{13}{12}\right]$, le membre de gauche, vu comme fonction de ε, est dérivable en 0, donc continu en 0, donc tend vers l'intégrale $\int_1^{\frac{13}{12}}\operatorname{argch}$ cherchée.

(r) Vu d'une part l'égalité $2^{3p+1}=e^{(3p+1)\ln 2}$ pour tout réel p et d'autre part la facilité à intégrer exp, un reparamétrage affine s'impose :

$$\int_{-\frac{1}{3}}^0 2^{3p+1}dp \underset{dq=3dp\ln 2}{\overset{q:=(3p+1)\ln 2}{=}} \int_{\left(3\left(-\frac{1}{3}\right)+1\right)\ln 2}^{(3\cdot 0+1)\ln 2} e^q\frac{dq}{3\ln 2}=\frac{1}{3\ln 2}\left[e^q\right]_{q=0}^{\ln 2}=\frac{e^{\ln 2}-e^0}{3\ln 2}=\frac{1}{3\ln 2}.$$

(s) Un reparamétrage linéaire et la reconnaissance d'une arc-tangente donnent

$$\int_{-2}^{2}\frac{dx}{4+x^2}\underset{dx=2dy}{\overset{y:=\frac{x}{2}}{=}}\int_{-1}^{1}\frac{2dy}{4+4y^2}=\frac{1}{2}\int_{y=-1}^{1}d\left(\arctan y\right)=\frac{\arctan 1-\arctan\left(-1\right)}{2}=\frac{\pi}{4}.$$

(t) On utilise une IPP $\left\downarrow\begin{array}{ccc}\operatorname{argth} t & & dt\\ & \searrow^{+} & \\ \frac{dt}{1-t^2} & \cdots^{-} & t\end{array}\right\uparrow$ pour se ramener à des fonctions plus simples, ce qui donne

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{3}}\operatorname{argth} t\ dt &= \left[t\ \operatorname{argth} t\right]_{t=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{3}}+\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{3}}\frac{-t\ dt}{1-t^2}\\
&= \left(\frac{1}{3}\frac{1}{2}\ln\frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}+\frac{1}{2}\frac{1}{2}\ln\frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}\right)+\frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{3}}\frac{d\,\boxed{1-t^2}}{\boxed{1-t^2}}\\
&\overset{\square:=1-t^2}{=} \frac{1}{6}\ln\frac{3+1}{3-4}+\frac{1}{4}\ln\frac{2-1}{2+1}+\frac{1}{2}\int_{\boxed{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2}}^{\boxed{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}}\frac{d\square}{\square}\\
&= \frac{1}{6}\ln 2+\frac{1}{4}\ln\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\int_{\square=\frac{3}{4}}^{\frac{8}{9}}d\left(\ln\square\right)\\
&= \frac{\ln 2}{6}-\frac{\ln 3}{4}+\frac{1}{2}\left[\ln\square\right]_{\square=\frac{3}{4}}^{\frac{8}{9}}\\
&= \frac{\ln 2}{6}-\frac{\ln 3}{4}+\frac{\left(3\ln 2-2\ln 3\right)-\left(\ln 3-2\ln 2\right)}{2}\\
&= \frac{\ln 2}{6}-\frac{\ln 3}{4}+\frac{5\ln 2}{2}-\frac{3\ln 3}{2}\\
&= \frac{8\ln 2}{3}-\frac{7\ln 3}{4}.
\end{aligned}$$

(u) On reparamètre grâce à $\frac{1}{\mathrm{Id}}$ pour se débarasser d'un argument au dénominateur puis on se ramène à un arc-sinus :

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{8}{\sqrt{3}}}^{8}\frac{dz}{z\sqrt{z^2-16}} &\underset{dy=-y^2dz}{\overset{y:=\frac{1}{z}}{=}} \int_{\frac{\sqrt{3}}{8}}^{\frac{1}{8}}\frac{-\frac{dy}{y^2}}{\frac{1}{y}\sqrt{\frac{1}{y^2}-16}}=\int_{\frac{1}{8}}^{\frac{\sqrt{3}}{8}}\frac{dy}{\sqrt{1-16y^2}}\\
&\underset{dx=4dy}{\overset{x:=4y}{=}} \int_{4\frac{1}{8}}^{4\frac{\sqrt{3}}{8}}\frac{\frac{dx}{4}}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{4}\left[\arcsin x\right]_{x=\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\\
&= \frac{\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}}{4}=\frac{\pi}{24}.
\end{aligned}$$

(v) On peut reparamétrer ou directement primitiver :

$$\begin{aligned}
\int_0^2 x^2\sqrt{1+x^3}dx &= \int_{x=0}^{2}\sqrt{\left(1+x^3\right)}\frac{d\left(1+x^3\right)}{3}=\frac{2}{9}\int_{x=0}^{2}d\,\boxed{\left(1+x^3\right)^{\frac{3}{2}}}\\
&= \frac{2}{9}\left(\sqrt{1+2^3}^3-\sqrt{1+0^3}^3\right)=\frac{2}{9}\left(27-1\right)\\
&= \frac{52}{9}.
\end{aligned}$$

(w) On peut reparamétrer

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin}{\cos^3} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{-\cos' t}{\cos^3 t}dt\overset{c:=\cos t}{=}\int_{\cos 0}^{\cos\frac{\pi}{4}}\frac{-dc}{c^3}=\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}c^{-3}dc\\
&= \left[\frac{c^{-2}}{-2}\right]_{c=\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}=\frac{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-2}}{-2}=\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

ou bien directement primitiver

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin}{\cos^3}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{-\cos'}{\cos^3}=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{1}{\cos^2}\right]'=\frac{1}{2\cos^2\frac{\pi}{4}}-\frac{1}{2\cos^2 0}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

Autre idée : reparamétrer par la tangente donne

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin}{\cos^3}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin}{\cos}\frac{1}{\cos^2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan\tan'=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\tan^2}{2}\right)'=\frac{\tan^2\frac{\pi}{4}}{2}-\frac{\tan^2 0}{2}=\frac{1}{2}.$$

(x) On peut reparamétrer

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{7}} g\sqrt[3]{g^2+1}\,dg &= \frac{1}{2}\int_{g=0}^{\sqrt{7}}\boxed{g^2+1}^{\frac{1}{3}}d\boxed{g^2+1}\overset{\square:=g^2+1}{=}\frac{1}{2}\int_{\boxed{0^2+1}}^{\boxed{\sqrt{7}^2+1}}\square^{\frac{1}{3}}d\square\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\square^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}\right]_{\square=1}^{8}=\frac{3}{8}\left(8^{\frac{4}{3}}-1^{\frac{4}{3}}\right)=\frac{3}{8}(16-1)=\frac{45}{8}\end{aligned}$$

ou bien directement primitiver

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{7}} g\sqrt[3]{g^2+1}\,dg &= \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{7}}\left(g^2+1\right)^{\frac{1}{3}}d\left(g^2+1\right)=\frac{3}{8}\int_0^{\sqrt{7}}d\boxed{\left(g^2+1\right)^{\frac{4}{3}}}\\ &= \frac{3}{8}\left(\sqrt[3]{\sqrt{7}^2+1}^4-\sqrt[3]{0^2+1}^4\right)=\frac{3}{8}(16-1)=\frac{45}{8}.\end{aligned}$$

(y) Un reparamétrage linéaire et la reconnaissance d'un arg-sinus hyperbolique donnent

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{45}{8}}\frac{da}{\sqrt{9+a^2}} &\underset{da=3db}{\overset{b:=\frac{a}{3}}{=}}\int_{\frac{1}{3}0}^{\frac{1}{3}\frac{45}{8}}\frac{3db}{\sqrt{9+9b^2}}=\int_0^{\frac{15}{8}}\frac{db}{\sqrt{1+b^2}}=[\operatorname{argsh} b]_{b=0}^{\frac{15}{8}}\\ &= \ln\left(\frac{15}{8}+\sqrt{1+\left(\frac{15}{8}\right)^2}\right)=\ln\left(\frac{15}{8}+\frac{\sqrt{64+225}}{8}\right)\\ &= \ln\left(\frac{15}{8}+\frac{17}{8}\right)=2\ln 2.\end{aligned}$$

(z) En utilisant l'égalité $\sin^3=\left(1-\cos^2\right)\sin$ destinée à ne faire apparaître qu'*une seule fois* la dérivée de cos, on peut reparamétrer

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^3 t\,dt}{\cos^5 t} &= \int_{t=0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\left(\boxed{\cos t}^2-1\right)d\boxed{\cos t}}{\boxed{\cos t}^5}\overset{\square:=\cos t}{=}\int_{\boxed{\cos 0}}^{\boxed{\cos\frac{\pi}{4}}}\frac{\square^2-1}{\square^5}d\square\\ &= \int_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\square^{-3}-\square^{-5}\right)d\square=\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1\square^{-5}d\square-\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1\square^{-3}d\square\\ &= \left[\frac{\square^{-4}}{-4}\right]_{\square=\frac{1}{\sqrt{2}}}^1-\left[\frac{\square^{-2}}{-2}\right]_{\square=\frac{1}{\sqrt{2}}}^1=\frac{1-4}{-4}+\frac{1-2}{2}=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

ou bien directement primitiver (more cumbersome)

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^3}{\cos^5} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\left(\cos^2-1\right)\cos'}{\cos^5}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\cos^{-2}}{-2}-\frac{\cos^{-4}}{-4}\right)'\\ &= \left(\frac{\cos^{-2}\frac{\pi}{4}}{-2}-\frac{\cos^{-4}\frac{\pi}{4}}{-4}\right)-\left(\frac{\cos^{-2}0}{-2}-\frac{\cos^{-4}0}{-4}\right)\\ &= \left(\frac{2}{-2}+\frac{4}{4}\right)-\left(\frac{1}{-2}+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Autre idée : reparamétrer par la tangente donne

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^3}{\cos^5}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sin}{\cos}\right)^3\frac{1}{\cos^2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^3\tan'=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\tan^4}{4}\right)'=\frac{\tan^4\frac{\pi}{4}}{4}-\frac{\tan^4 0}{4}=\frac{1}{4}.$$