Matrices

(T. G. 20)

Solution proposée. Si $A = (a_{i,j})$ est une matrice de taille (p, q), on pourra abréger $[A]_{x,y} := a_{x,y}$ pour tous entiers $x \in [1, p]$ et $y \in [1, q]$. Par exemple, on a $[E_{i,j}]_{x,y} = \delta_i^x \delta_j^y$ pour tous entiers $i, j, x, y \geq 0$.

1. On décompose le vecteur $(1 + X)^3 = X^3 + 3X^2 + 3X + 1$ dans la base donnée en $1\,(1) + 0\,(X - 2) + 3\left(X^2\right) + 1\left(X^3 + 3X\right)$, d'où la matrice cherchée $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. On décompose chacun des vecteurs de la famille donnée dans la base considérée :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} &= \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} &= -\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} &= 6\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

d'où la matrice cherchée $\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 & 6 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

3.

(a) On considère la base donnée au départ, à savoir celle canonique $\left(1, X, X^2, X^3\right)$, on calcule les images de chacun des vecteurs de cette base par l'application donnée et on décompose chacune de ses images dans la base donnée à l'arrivée – à savoir celle canonique $\left(1, X, X^2\right)$. On trouve

$$\begin{aligned} 1 &\longmapsto 1' = 0 = 01 + 0X + 0X^2 \\ X &\longmapsto X' = 1 = 1 \cdot 1 + 0X + 0X^2 \\ X^2 &\longmapsto \left(X^2\right)' = 2X = 01 + 2X + 0X^2 \\ X^3 &\longmapsto \left(X^3\right)' = 3X^2 = 01 + 0X + 2X^2 \end{aligned}$$

d'où la matrice (en reprenant la définition)

$$\begin{pmatrix} \circ & 1 & \circ & \circ \\ \circ & \circ & 2 & \circ \\ \circ & \circ & \circ & 3 \end{pmatrix}.$$

Dans la première colonne, on lit les coordonnées de l'image de 1 (dans la base canonique), dans la seconde celles de l'image de X, dans la troisième celles de l'image de X^2 et dans la dernière celles de l'image de X^3.

(b) On n'oubliera pas de vérifier que les deux bases imposées en sont bien[1]. On regarde l'image de chacun des vecteurs de la base $\left(1, X - 2, X^2 + 7X, X^3\right)$ donnée au départ :

$$\begin{aligned} 1 &\longmapsto 1' = 0 \\ X - 2 &\longmapsto (X - 2)' = 1 \\ X^2 + 7X &\longmapsto \left(X^2 + 7X\right)' = 2X + 7 \\ X^3 &\longmapsto \left(X^3\right)' = 3X^2. \end{aligned}$$

[1] vu leurs cardinaux, ils suffit de montrer qu'elles sont libres, ce qui est laissé aux bons soins du lecteur

Pour décomposer ces dernières dans la base $\left(5, 1-X, 3-2X^2\right)$ donnée à l'arrivée, le deux premiers sont aisés :

$$\begin{array}{rcl} 1 & \longmapsto & 0 = 05 + 0\,(1-X) + 0\left(3-2X^2\right) \\ X-2 & \longmapsto & 1 = \dfrac{1}{5}5 + 0\,(1-X) + 0\left(3-2X^2\right). \end{array}$$

Pour les autres, on commence par ajuster le terme de plus haut degré :

$$X^2 + 7X \longmapsto 2X + 7 \stackrel{?}{=} \lambda 5 + \mu\,(1-X) + \nu\left(3-2X^2\right) \text{ pour certains scalaires } \lambda, \mu, \nu.$$

Pas de terme en X^2, donc on doit prendre $\nu = 0$. Puis le coefficient en X vaut 2, donc on doit avoir $\mu = -2$. Il reste $2X + 7 = \lambda 5 - 2\,(1-X)$, ce qui force $\lambda = \frac{9}{5}$.

De même, on écrirait

$$X^3 \longmapsto 3X^2 \stackrel{?}{=} a5 + b\,(1-X) + c\left(3-2X^2\right) \text{ pour certains scalaires } a, b, c \text{ à trouver.}$$

Le terme $3X^2$ impose de prendre $c = -\frac{3}{2}$, le terme $0X$ impose $b = 0$; il reste $3X^2 \stackrel{?}{=} 5a - \frac{3}{2}\left(3-2X^2\right)$, ce qui équivaut à $a = \frac{9}{10}$.

Finalement, la matrice voulue vaut

$$\begin{pmatrix} \circ & \frac{1}{5} & \frac{9}{5} & \frac{9}{10} \\ \circ & \circ & -2 & \circ \\ \circ & \circ & \circ & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Ce n'est pas la même, et pourtant il s'agit de la même application : d'où l'importance de *préciser les bases* – au départ comme à l'arrivée.

(c) On regarde les images des éléments de la base donnée au départ, à savoir $\left(1, X, X^2, X^3\right)$:

$$\begin{array}{rcl} 1 & \longmapsto & X^2 1' - 1 = -1 \\ X & \longmapsto & X^2 X' - X = X^2 - X \\ X^2 & \longmapsto & X^2\left(X^2\right)' - X^2 = 2X^3 - X^2 \\ X^3 & \longmapsto & X^2\left(X^3\right)' - X^3 = 3X^4 - X^3, \end{array}$$

d'où la matrice cherchée

$$\begin{pmatrix} -1 & \circ & \circ & \circ \\ \circ & -1 & \circ & \circ \\ \circ & 1 & -1 & \circ \\ \circ & \circ & 2 & -1 \\ \circ & \circ & \circ & 3 \end{pmatrix}.$$

(d) On fixe une homothétie $x \mapsto \lambda x$ pour un certain scalaire λ (le rapport de l'homothétie). On fixe une base $(e_1, ..., e_n)$ de l'espace vectoriel considéré. Alors tout e_i est envoyé sur λe_i dont les coordonnées dans la base $(e_1, ..., e_n)$ sont toutes nulles sauf la i-ième qui vaut 1. Ainsi, la matrice voulue est

$$\begin{pmatrix} \lambda & \circ & \cdots & \circ & \circ \\ \circ & \lambda & & \circ & \circ \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \circ & \circ & & \lambda & \circ \\ \circ & \circ & \cdots & \circ & \lambda \end{pmatrix} \text{ avec que des } \lambda \text{ sur la diagonale et 0 partout ailleurs.}$$

On observera que la matrice de $\lambda\,\mathrm{Id}$ est la même quelle que soit la base choisie.

(e) Comme d'habitude, on regarde les images des vecteurs de la base donnée au départ (ici la base canonique de $\mathbf{K}^4$) :

$$\begin{array}{rcl} (1, \circ, \circ, \circ) & \longmapsto & (1, 3) \\ (\circ, 1, \circ, \circ) & \longmapsto & (-2, \circ) \\ (\circ, \circ, 1, \circ) & \longmapsto & (1, \circ) \\ (\circ, \circ, \circ, 1) & \longmapsto & (\circ, 1), \end{array}$$

d'où la matrice désirée

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & \circ \\ 3 & \circ & \circ & 1 \end{pmatrix}.$$

(f) Codons un point de $\mathbf{R}^2$ par le complexe associé. On sait alors qu'appliquer une rotation de centre 0 et d'angle θ revient (en complexe) à multiplier par $e^{i\theta}$. Appliquons (avec ici $\theta = \frac{\pi}{3}$) : un point (a, b) codé par le complexe $a + ib$ est envoyé sur

$$\begin{aligned} (a+ib)\, e^{i\frac{\pi}{3}} &= (a+ib)\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = (a+ib)\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \frac{a - b\sqrt{3}}{2} + i\frac{b + a\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi, la base donnée au départ est envoyée sur :

$$\begin{aligned} (1, \circ) &\longmapsto \left(\frac{1 - 0\sqrt{3}}{2}, \frac{0 + 1\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ (\circ, 1) &\longmapsto \left(\frac{0 - 1\sqrt{3}}{2}, \frac{1 + 0\sqrt{3}}{2}\right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), \end{aligned}$$

d'où la matrice cherchée

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(g) On reprend le résultat de la question précédente, en décomposant les images des vecteur de la base donnée au départ dans celle imposée à l'arrivée :

$$\begin{aligned} (1, -2) &\longmapsto \begin{pmatrix} \frac{1-(-2)\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-2+1\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \sqrt{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{3}}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ (2, 1) &\longmapsto \begin{pmatrix} \frac{2-1\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1+2\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} + \sqrt{3} \end{pmatrix} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

d'où ma matrice voulue :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

C'est la même que celle qui précède.

On montrerait de même que, pour tout réel θ, la matrice de la rotation de centre 0 et d'angle θ dans n'importe quelle base orthonormée directe est $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

(h) Pour changer on décompose les images des vecteurs de la base $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \circ \\ \circ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \circ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ imposée au départ dans la base $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ donnée à l'arrivée :

$$\begin{aligned} (1, \circ, \circ) &\longmapsto \begin{pmatrix} 1 \\ \circ \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ (\circ, 1, \circ) &\longmapsto \begin{pmatrix} \circ \\ \circ \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ (\circ, \circ, 1) &\longmapsto \begin{pmatrix} \circ \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

d'où la matrice cherchée

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \circ & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \circ & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

4. Notons φ l'isomorphisme considéré. Soit $*$ une multiplication sur $M_n(\mathbf{K})$ qui convient. On a alors, pour toutes matrices A et B dans $M_n(\mathbf{K})$, l'égalité

$$A * B = \varphi\left(\varphi^{-1}(A)\right) * \varphi\left(\varphi^{-1}(B)\right) = \varphi\left(\varphi^{-1}(A) \circ \varphi^{-1}(B)\right),$$

ce qui montre bien que le produit $A * B$ ne peut prendre qu'une seule valeur.

5. Soit $(\lambda_{i,j}) \in \mathbf{K}^{mn}$ tel que $\sum_{\substack{1\leq i\leq m\\1\leq j\leq n}} \lambda_{i,j} E_{i,j} = 0$. Soit $(x,y) \in \{1,2,...,m\} \times \{1,2,...,n\}$. Le coefficient d'indice (x,y) du membre de droite est nul ; or celui du membre gauche vaut

$$\left[\sum_{\substack{1\leq i\leq m\\1\leq j\leq n}} \lambda_{i,j} E_{i,j}\right]_{x,y} = \sum_{\substack{1\leq i\leq m\\1\leq j\leq n}} \lambda_{i,j} \left[E_{i,j}\right]_{x,y} = \sum_{\substack{1\leq i\leq m\\1\leq j\leq n}} \lambda_{i,j} \delta_i^x \delta_j^y = \sum_{\substack{i=x\\j=y}} \lambda_{i,j} \delta_i^x \delta_j^y = \lambda_{x,y},$$

d'où la nullité de la famille $(\lambda_{i,j})$.

6. Soient r et s deux entiers dans $[1,n]$. Le coefficient d'indice (r,s) de la matrice $E_{i,j}E_{x,y}$ vaut

$$\left[E_{i,j}E_{x,y}\right]_{r,s} = \sum_{a=1}^{n} \left[E_{i,j}\right]_{r,a} \left[E_{x,y}\right]_{a,s} = \sum_{a=1}^{n} \delta_r^i \delta_a^j \ \delta_a^x \delta_s^y = \delta_r^i \delta_s^y \sum_{a=1}^{n} \underbrace{\delta_a^j \delta_a^x}_{\substack{=1 \text{ si } j=a=x\\ \text{et } =0 \text{ sinon}}} = \left[E_{i,y}\right]_{r,s} \delta_j^x = \left[\delta_j^x E_{i,y}\right]_{r,s},$$

d'où l'égalités des matrices $E_{i,j}E_{x,y}$ et $\delta_j^x E_{i,y}$ (elles coïncident en tout point).

7. L'application linéaire considérée est $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbf{K}^q & \longrightarrow & \mathbf{K}^p \\ X & \longrightarrow & AX \end{array}\right.$. Notons (e_i) et (f_j) les bases canoniques respectives de $\mathbf{K}^q$ et $\mathbf{K}^p$. On a déjà vu en cours que Ae_i valait la i-ième colonne de A – notons-la C_i – (pour tout entier $i \in [1,q]$) et l'on vérifiera tout aussi aisément que la matrice d'un vecteur colonne $C \in \mathbf{K}^p$ dans la base canonique de ce dernier vaut C. Ainsi la matrice de A vue dans $L(\mathbf{K}^q, \mathbf{K}^p)$ est-elle la matrice formée des colonnes $C_1, C_2, ..., C_q$, à savoir A tout court.

8. L'énoncé nous dit que A est inversible à droite. Puisque $\times$ est associative et admet un neutre, il suffit de montrer que A est inversible à gauche, *i. e.* que l'application $\varphi : \left\{\begin{array}{ccc} M_n(\mathbf{K}) & \longmapsto & M_n(\mathbf{K}) \\ M & \longrightarrow & MA \end{array}\right.$ atteint I_n, ce qui revient à la surjectivité de φ ($\boxed{\Longleftarrow}$ évident ; $\boxed{\Longrightarrow}$ si I_n est l'image d'un certain A', alors toute matrice N est l'image de NA'). Puisque la multiplication de $M_n(\mathbf{K})$ est distributive sur l'addition et compatible avec celle externe, φ est linéaire, donc est un endomorphisme de $M_n(\mathbf{K})$. Vu que ce dernier est de dimension finie, notre problème revient à montrer l'injectivité de φ. Soit $M \in \operatorname{Ker}\varphi$. On a alors $0 = 0B = (MA)B = M(AB) = M1 = M$, ce qui conclut.

9. On observera que le produit $\begin{pmatrix} \circ & 1 \\ 1 & \circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \circ \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas symétrique. Ainsi, en plaçant les deux blocs facteurs blocs en haut à gauche d'une matrice $n \times n$ dont tous les autres coefficients seront pris nuls, on obtient deux matrices dans $S_n(\mathbf{K})$ dont le produit ne reste pas dans $S_n(\mathbf{K})$. Par conséquent, $S_n(\mathbf{K})$ n'est jamais stable par produit quand $n \geq 2$.

Remarquer que le carré d'une matrice anti-symétrique est symétrique : ce carré reste donc anti-symétrique ssi il est symétrique et anti-symétrique, *i. e.* ssi il est nul. Or $S_n(\mathbf{K})$ contient des matrices non nulles dès que $n \geq 2$ (placer un bloc $\begin{pmatrix} \circ & -1 \\ 1 & \circ \end{pmatrix}$ tout en haut à gauche), ce qui montre qu'il n'est pas stable par produit.

Lorsque $n = 1$, les espaces $S_1(\mathbf{K})$ et $AS_1(\mathbf{K})$ deviennent respectivement $M_1(\mathbf{K}) = \mathbf{K}$ et $\{0\}$, lesquels sont stables par produit.

10. Si T est triangulaire inférieure, alors ${}^tT$ est triangulaire supérieure et l'on a $\left({}^tT\right)^n = {}^t(T^n)$; il suffit donc de montrer le résultat pour les matrices triangulaires *supérieures* strictes. Nous supposerons donc T *supérieure* pour la suite de l'exercice.

Pour tout entier $p \in \mathbf{N}^*$, notons E_p l'énoncé $\forall (x,y) \in \{1,2,...,n\}^2,\ x > y - p \Longrightarrow [T^p]_{x,y} = 0$.

L'énoncé E_1 équivaut à $\forall (x,y) \in \{1,2,...,n\}^2,\ x \geq y \Longrightarrow t_{x,y} = 0$, ce qui est vrai par définition d'une matrice triangulaire supérieure stricte.

Soit $k \in \mathbf{N}^*$ tel que E_k. Montrons E_{k+1}. Soit (x,y) dans $\{1,2,...,n\}^2$ tel que $x > y-(k+1)$. Notons $U := T^k$. On a alors

$$\left[T^{k+1}\right]_{x,y} = [TU]_{x,y} = \sum_{*=1}^{n} \underbrace{t_{x,*}}_{\substack{=0 \text{ si } x\geq * \\ (\text{d'après } E_1)}} \overbrace{u_{*,y}}^{\substack{(\text{d'après } E_k) \\ =0 \text{ si } *>y-k}} = \sum_{y-k\leq *<x} t_{x,*}u_{*,y} \underset{x\geq y-k}{\overset{\text{puisque}}{=}} \sum_{*\in\emptyset} t_{x,*}u_{*,y} = 0, \text{ d'où } E_{k+1}.$$

Nous avons par conséquent montré $\forall p \in \mathbf{N},\ E_p$, d'où l'on déduit E_n. Or l'hypothèse $x > y-n$ est toujours vérifiée pour tout $(x,y) \in \{1,2,...,n\}^2$ (puisqu'alors $x \geq 1 > 0 \geq y-n$), ce qui permet de conclure à la nullité de tous les coefficients de T^n.

11. On va faire des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes, opérations qui simplifient la matrice et que nous savons conserver le rang. On s'autorisera dans un premier temps à marcher à pieds joints sur les quelques divisions par zéro qui nous embêtent ; nous les traiterons à part plus tard.

La matrice étant homogène en (a,b), on a envie de poser $c := \frac{b}{a}$ et de diviser toutes les lignes par a^2, ce qui donne la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & c & c & c^2 \\ c & 1 & c^2 & c \\ c & c^2 & 1 & c \\ c^2 & c & c & 1 \end{pmatrix}.$$

On a un 1 tout en haut à gauche, ce qui permet de tuer les coefficients en dessous à l'aide des opérations $\left\{\begin{array}{l} L_2 \longleftarrow L_2 - cL_1 \\ L_3 \longleftarrow L_3 - cL_1 \\ L_4 \longleftarrow L_4 - c^2L_1 \end{array}\right.$: on obtient la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & c & c & c^2 \\ \circ & 1-c^2 & \circ & c-c^3 \\ \circ & \circ & 1-c^2 & c-c^3 \\ \circ & c-c^3 & c-c^3 & 1-c^4 \end{pmatrix},$$

dont le rang vaut 1 plus le rang de la sous-matrice

$$\begin{pmatrix} 1-c^2 & \circ & c\left(1-c^2\right) \\ \circ & 1-c^2 & c\left(1-c^2\right) \\ c\left(1-c^2\right) & c\left(1-c^2\right) & \left(1-c^2\right)\left(1+c^2\right) \end{pmatrix}.$$

Divisant toutes les colonnes par $1-c^2$, on obtient

$$\begin{pmatrix} 1 & \circ & c \\ \circ & 1 & c \\ c & c & 1+c^2 \end{pmatrix}.$$

On tue le c de la première colonne via $L_3 \longleftarrow L_3 - cL_1$, ce qui donne

$$\begin{pmatrix} 1 & \circ & c \\ \circ & 1 & c \\ \circ & c & 1 \end{pmatrix},$$

dont le rang vaut 1 plus le rang de

$$\begin{pmatrix} 1 & c \\ c & 1 \end{pmatrix},$$

laquelle est de rang 2 (ou 1 si $c = \pm 1$).

Finalement, on trouve un rang 4 lorsque tout ce qui précède est légitime. Listons les illégalités que nous avons commises : $a = 0$, $c^2 = 1$, $c = 1$. Il suffit de les traiter à part.

Lorsque $a = 0$, la matrice devient $\begin{pmatrix} \circ & \circ & \circ & b^2 \\ \circ & \circ & b^2 & \circ \\ \circ & b^2 & \circ & \circ \\ b^2 & \circ & \circ & \circ \end{pmatrix}$ qui est de rang 4 si $b \neq 0$ et de rang 0 si $b = 0$.

Lorsque $a \neq 0$ et $c^2 = 1$, la matrice 3×3 avant division par $1 - c^2$ est nulle, donc le rang cherché vaut 1.

Le cas $c = 1$ est un cas particulier de $c^2 = 1$.

Résumons :

(condition)	(rang)
$a^2 \neq b^2$	4
$a^2 = b^2 \neq 0$	1
$a^2 = b^2 = 0$	0

.