Matrices

(T. G. 20)

On fixe un entier $n \in \mathbf{N}$.

1. *Donner la matrice du vecteur* $(1+X)^3$ *dans la base* $\left(1, X-2, X^2, X^3+3X\right)$ *de* $\mathbf{K}_3[X]$.
2. *Donner la matrice de la famille* $\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\5\end{pmatrix}\right)$ *dans la base* $\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right)$ *de* $\mathbf{K}^2$.
3. *Donner les matrices des applications linéaires suivantes dans les bases considérées :*
   (a) $\left\{\begin{array}{ccc}\mathbf{K}_3[X] & \longrightarrow & \mathbf{K}_2[X]\\ P & \longmapsto & P'\end{array}\right.$ *dans les bases canoniques ;*
   (b) $\left\{\begin{array}{ccc}\mathbf{K}_3[X] & \longrightarrow & \mathbf{K}_2[X]\\ p & \longmapsto & p'\end{array}\right.$ *dans la base* $\left(1, X-2, X^2+7X, X^3\right)$ *au départ et* $\left(5, 1-X, 3-2X^2\right)$ *à l'arrivée ;*
   (c) $\left\{\begin{array}{ccc}\mathbf{K}_3[X] & \longrightarrow & \mathbf{K}_4[X]\\ x & \longmapsto & X^2x'-x\end{array}\right.$ *dans les bases canoniques ;*
   (d) *n'importe quelle homothétie dans n'importe quelle base (la même au départ et à l'arrivée) ;*
   (e) $\left\{\begin{array}{ccc}\mathbf{K}^4 & \longrightarrow & \mathbf{K}^2\\ (c,p,g,e) & \longmapsto & (c-2p+g, e+3c)\end{array}\right.$ *dans les bases canoniques ;*
   (f) *la rotation (dans* $\mathbf{R}^2$*) de centre* 0 *et d'angle* $\frac{\pi}{3}$ *dans la base canonique (au départ et à l'arrivée) ;*
   (g) *la rotation (dans* $\mathbf{R}^2$*) de centre* 0 *et d'angle* $\frac{\pi}{3}$ *dans la base* $\left(\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right)$ *(au départ et à l'arrivée) ;*
   (h) *la projection* $\left\{\begin{array}{ccc}\mathbf{K}^3 & \longrightarrow & \mathbf{K}^2\\ (t,s,i) & \longmapsto & (t,i)\end{array}\right.$ *dans les bases* $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ *au départ et* $\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right)$ *à l'arrivée.*
4. *Montrer qu'on ne peut définir qu'au plus une multiplication sur* $M_n(\mathbf{K})$ *telle que l'isomorphisme d'espaces vectoriels* $L(\mathbf{K}^n) \longrightarrow M_n(\mathbf{K})$ *vu en cours préserve les multiplications.*
5. *Soit* $m \in \mathbf{N}$. *Montrer que les matrices élémentaires* $(E_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq m\\1\leq j\leq n}}$ *forment une famille libre de* $M_{m,n}(\mathbf{K})$.
6. *Soient* $(i,j,x,y) \in \{1,2,...,n\}$. *Montrer l'égalité* $E_{i,j}E_{x,y} = \delta_j^x E_{i,y}$ *dans* $M_n(\mathbf{K})$.
7. *Soient* $(p,q) \in \mathbf{N}^2$ *et* $A \in M_{p,q}(\mathbf{K})$. *Expliciter la matrice de l'application linéaire canoniquement associée à la matrice* A *dans les bases canoniques des espaces à considérer.*
8. *Soit* $(A,B) \in M_n(\mathbf{K})^2$ *tel que* $AB = I_n$. *Montrer que* A *et* B *sont inversibles.* (hint ; traduire le problème en termes de surjectivité d'un endomorphisme de $M_n(\mathbf{K})$)
9. *Les espaces* $S_n(\mathbf{K})$ *et* $AS_n(\mathbf{K})$ *sont-ils stables par produit ?* (hint : regarder le cas $n=2$)
10. *Soit* T *une matrice triangulaire stricte de taille* n. *Montrer que* $T^n = 0$. (hint : montrer par récurrence sur k que le coefficient de T^k d'indice (x,y) est nul si $x \geq y-k$)
11. *Soient* a *et* b *deux scalaires. Calculer le rang de la matrice* $\begin{pmatrix}a^2 & ab & ab & b^2\\ ab & a^2 & b^2 & ab\\ ab & b^2 & a^2 & ab\\ b^2 & ab & ab & a^2\end{pmatrix}$.