Vecteurs

(T. G. 2)

Dans tout ce qui suit, les points et vecteurs, identifiés à un triplet de coordonnées présenté indifféremment en ligne ou en colonne, seront considérés dans la ***base canonique*** de $\mathbf{R}^3$, *i. e.* la base orthonormée directe de $\mathbf{R}^3$ formée des vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Les équations des lieux géométriques qui suivent équivalent chacune à ce qu'un point (x, y, z) appartienne au lieu considéré.

1. Déterminer la distance entre le point $(2, 2, 3)$ et le plan d'équation $2x + 3y + 5z = 0$.
2. On se donne six réels $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$. Montrer la comparaison
$$(a\alpha + b\beta + c\gamma)^2 \leq \left(a^2 + b^2 + c^2\right)\left(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2\right).$$
3. Donner une condition portant sur un réel λ qui soit équivalente à l'alignement des trois points $\binom{2}{3}$, $\binom{4}{1}$ et $\binom{5}{\lambda}$.
4. Déterminer l'équation de la droite passant par le point $(1, 5, 0)$ et dirigée par le vecteur $(-2, 3, 1)$.
5. Préciser le projeté orthogonal du vecteur $(3, -1, 1)$ sur la droite passant par l'origine et le point $(2, 1, -2)$.
6. Donner l'équation du plan défini par les trois points $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
7. Trouver un vecteur normal au plan formé par les trois points $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
8. Exhiber un vecteur parallèle au plan d'équation $2x - y - z = 4$ et orthogonal au vecteur $(1, 1, 1)$.
9. Donner un vecteur de norme 2 appartenant au deux plans d'équations respectives $\left\{ \begin{array}{l} x + 2y + z = 1 \\ x - y + 2z = -7 \end{array} \right.$.
10. Trouver à $0,1^\circ$ près l'angle fait par la droite d'équation $\left\{ \begin{array}{l} x + 2y - z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{array} \right.$ avec l'axe des abscisses.
11. Calculer à un dixième de degré près l'angle entre la droite d'équation $\frac{1-x}{4} = \frac{y}{3} = \frac{-z}{5}$ et le vecteur $(1, 1, 0)$.
12. Quelle est la distance du point $(3, 2, 1)$ à la droite d'équation $\left\{ \begin{array}{l} x + y = 0 \\ y - z = 1 \end{array} \right.$?
13. Trouver un vecteur unitaire orthogonal au vecteur $(1, 1, -2)$ et qui soit dans le plan contenant les vecteurs $(2, -1, 1)$ et $(1, 2, -2)$.
14. On se donne une droite Δ d'équation $\left\{ \begin{array}{l} x - 2z - 3 = 0 \\ y - 2z = 0 \end{array} \right.$ et un plan Π d'équation $x + 3y - z + 4 = 0$. Déterminer le point situé à l'intersection $\Delta \cap \Pi$ ainsi que l'équation de la droite de Π passant par ce point et qui est orthogonale à Δ.
15. Retrouver la loi d'addition des sinus en considérant un produit vectoriel adéquat.
16. On considère un tétraèdre régulier inscrit dans la sphère unité. Déterminer l'angle entre deux sommets du tétraèdre vus depuis le centre de la sphère et évaluer le volume du tétraèdre.
17. Déterminer la distance entre les deux droites d'équations $\left\{ \begin{array}{l} 3x - 2z = 0 \\ y - 2z = 5 \end{array} \right.$ et $\frac{2-x}{3} = y = \frac{-z}{2}$.