Trigonométrie

(T. G. 1)

Un ***multiple*** d'un truc $\top$ est quelque chose qui s'écrit $\top$ multiplié par un coefficient.

Lorsqu'on parle de multiple [ajd.], c'est pour dire que le coefficient est [adj.].

Par exemple, les multiples sont usuellement *entiers* : $1\top$, $2\top$, $3\top$, $4\top$...

On pourrait parler de multiples *rationnels* : par exemple, tous les angles qui ont une mesure entière en degrés valent en radians un multiple rationnel de π ($90° \leftrightarrow \frac{\pi}{2}$, $72° \leftrightarrow \frac{2\pi}{5}$...).

Ou encore de multiples *réels* : tout multiple réel d'un complexe a même argument que lui *modulo* π.

Le ***premier quadrant*** est le quart de plan délimité par les points à coordonnées toutes deux positives.

La ***première bissectrice*** est (vue dans le plan complexe) la bissectrice des demi-droites $\mathbb{R}^+$ et $i\mathbb{R}^+$.

Solution proposée.

Commençons par retrouver géométriquement les lignes trigonométriques usuelles (autre que 0 et $\frac{\pi}{2}$ qui sont triviales).

Concernant $\frac{\pi}{4}$, traçons un carré $ABCD$ de côté 1. La diagonale $[AC]$ est de longueur $\sqrt{2}$ par Pythagore ($AC^2 = AB^2 + BC^2 = 2$), ce qui permet de lire directement dans le triangle rectangle ABC :

$$\begin{aligned}
\cos\frac{\pi}{4} &= \cos\widehat{CAB} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\
\sin\frac{\pi}{4} &= \sin\widehat{CAB} = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\
\tan\frac{\pi}{4} &= \tan\widehat{CAB} = \frac{BC}{AB}) = 1.
\end{aligned}$$

Pour $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{6}$, on considère un triangle équilatéral ABC de côté 2 dont on considère la hauteur issue de A. Cette dernière est un axe de symétrie du triangle, donc son pied H est le milieu de $[BC]$, d'où la longueur $BH = 1$. La troisième longueur AH dans le triangle rectangle ABH s'obtient par Pythagore : $AB^2 = AH^2 + BH^2$, *i. e.* $4 = AH^2 + 1$, ou encore $AH = \sqrt{3}$. Il ne reste alors plus qu'à lire dans le triangle rectangle ABH :

$$\begin{aligned}
\cos\frac{\pi}{3} &= \cos\widehat{ABH} = \frac{BH}{AB} = \frac{1}{2}, & \cos\frac{\pi}{6} &= \cos\widehat{BAH} = \frac{AH}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\
\sin\frac{\pi}{3} &= \sin\widehat{ABH} = \frac{AH}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}, & \sin\frac{\pi}{6} &= \sin\widehat{BAH} = \frac{BH}{AB} = \frac{1}{2}, \\
\tan\frac{\pi}{3} &= \tan\widehat{ABH} = \frac{AH}{BH} = \sqrt{3}, & \tan\frac{\pi}{6} &= \tan\widehat{BAH} = \frac{BH}{AH} = \frac{1}{\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

1. La première chose à faire est de lister tous les angles dont on cherche les lignes trigonométriques. Il semble y en avoir beaucoup (autant que d'entiers) mais la 2π-périodicité des fonctions cos, sin et tan permet de se restreindre aux angles de $[-\pi, \pi]$. (Par exemple, l'angle $\frac{362}{7}\pi$ a les même lignes trigo que $-\frac{2\pi}{7}$ car la différence est un multiple[1] de 2π.)

   Ensuite, le cours nous dit comment ramener les lignes trigo de n'importe quel angle vers celles des angles du premier quadrant : par une réflexion d'axe celui des abscisses ($\theta \mapsto -\theta$), des ordonnées ($\theta \mapsto \pi - \theta$) ou par une symétrie centrale ($\theta \mapsto \theta \pm \pi$). (On aura par exemple $\cos\frac{11\pi}{12} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{12}\right) = -\sin\frac{\pi}{12}$.) On peut donc se restreindre aux multiples entiers de $\frac{\pi}{12}$ du segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

   Mieux : le cours nous donne une autre réflexion (celle par rapport à la première bissectrice) qui renvoit les angles de $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur ceux de $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

   Par conséquent, on est ramené aux angles $0\frac{\pi}{12}$, $1\frac{\pi}{12}$, $2\frac{\pi}{12}$ et $3\frac{\pi}{12}$, à savoir 0, $\frac{\pi}{12}$, $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{4}$. Seules les lignes de $\frac{\pi}{12}$ ne sont pas usuelles (*cf.* cours).

[1] On a divisé 362 par 7 comme suit : 350 est un multiple proche ($350 = 50 \times 7$), il reste alors $62 - 50 = 12 = 2 \times 7 - 2$, d'où la division $362 = 52 \times 7 - 2$ et la relation

$$\frac{362\pi}{7} = 26\,(2\pi) - \frac{2\pi}{7}.$$

Puisque $\tan = \frac{\sin}{\cos}$, il suffit de calculer $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$. Puisque $\cos^2 + \sin^2 = 1$, ce qui se réécrit $\sin = \pm\sqrt{1-\cos^2}$, il suffit de connaître $\cos\frac{\pi}{12}$ et le signe de $\sin\frac{\pi}{12}$ (c'est un $+$ car $\frac{\pi}{12}$ tombe dans le premier quadrant).

Finalement, tout revient au calcul de $\cos\frac{\pi}{12}$.

L'indication $\frac{1}{12} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$ permet d'écrire $\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$. Il nous faudrait donc un outil pour calculer le cosinus d'une différence : c'est précisément le rôle des formules d'addition. On obtient

$$\begin{aligned}\cos\frac{\pi}{12} &= \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} \\ &= \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

Pour répondre précisément à la question, il faudrait écrire le résultat sous la forme $\frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{4}\sqrt{6}$. (On aurait également pu décomposer $\frac{1}{12} = \frac{1}{4} - \frac{1}{6}$.)

On peut aussi écrire $2\frac{1}{12} = \frac{1}{6}$ et en déduire la relation $\cos\left(2\frac{\pi}{12}\right) = \cos\frac{\pi}{6}$: on aurait alors besoin d'une formule exprimant $\cos 2\theta$ en fonction de $\cos\theta$, ce qui fait l'objet des formules de duplication. On obtient

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{3}}{2} &= \cos\frac{\pi}{6} = \cos\left(2\frac{\pi}{12}\right) = 2\cos^2\frac{\pi}{12} - 1, \\ \text{d'où l'on tire } \cos\frac{\pi}{12} &= +\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}} \text{ (le cercle trigo indique le signe).}\end{aligned}$$

Contrairement aux apparences, les deux expressions trouvées sont égales (elles doivent l'être de toute façon puisqu'elles sont toutes deux égales à une même quantité), ce que l'on peut vérifier par les équivalences

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}} &\overset{?}{=} \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ \iff \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} &\overset{?}{=} \frac{\left(1+\sqrt{3}\right)^2}{8} \\ \iff 4 + 2\sqrt{3} &\overset{?}{=} 1 + 2\sqrt{3} + 3, \text{ ce qui est vrai.}\end{aligned}$$

On peut à présent tout remonter et obtenir aisément toutes les lignes demandées.

On obtient $\cos^2\frac{\pi}{12} = \frac{\left(1+\sqrt{3}\right)^2}{8} = \frac{1+2\sqrt{3}+3}{8} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}$, d'où

$$\sin\frac{\pi}{12} = +\sqrt{1 - \cos^2\frac{\pi}{12}} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)} = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}}.$$

Il s'agit malheureusement de radicaux emboités. On peut s'en sortir en appliquant la formule d'addition du sinus à $\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$, ou bien en trouvant tout de suite la factorisation en carré :

$$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{8} = \frac{3 - 2\sqrt{3} + 1}{8} = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\right)^2.$$

Dans les deux cas, on obtient

$$\sin\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{4}\sqrt{6} - \frac{1}{4}\sqrt{2}.$$

On peut alors récupérer la tangente

$$\tan\frac{\pi}{12} = \frac{\sin\frac{\pi}{12}}{\cos\frac{\pi}{12}} = \frac{\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}}{\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{3-1} = 2 - \sqrt{3}.$$

On aurait également pu appliquer la formule de l'arc moitié $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$ à $\theta = \frac{\pi}{12}$, ce qui aurait donné

$$\tan\frac{\pi}{12} = \frac{1 - \cos\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = 2 - \sqrt{3}.$$

Dans tous les cas on peut récupérer

$$\tan\frac{5\pi}{12} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{\tan\frac{\pi}{12}} = \frac{1+\cos\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}} = 2+\sqrt{3}.$$

Cela nous permet de compléter les lignes trigo cherchées pour le premier quadrant :

θ	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\theta$	0	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	0
$\tan\theta$	0	$2-\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$	$\pm\infty$

.

Les trois autres quadrants d'obtiennent par les transformations du cours indiquées (il n'y aura de lignes trigo nouvelles, uniquement des signes $-$ à mettre de temps à autre).

2. Il convient avant toute chose d'*observer* la figure – en particulier de partir à la *chasse aux angles*. Ici, on voit que $\widehat{ABD} = \frac{1}{2}\widehat{ABC} = \frac{1}{2}\frac{2\pi}{5} = \widehat{BAD}$, ce qui montre que le triangle ABD est isocèle en D. (On sait jamais, ça pourra servir.)

   (a) Dans le triangle rectangle BDH, on lit $\eta = \cos\widehat{HBD} = \frac{BH}{BD}$; or, la hauteur $[DH]$ est aussi médiane (c'est un axe de symétrie du triangle ABD), d'où $BH = \frac{1}{2}BA$. Il en résulte

   $$BD = \frac{AB}{2\eta}.$$

   (b) Le point D étant intérieur au segment $[AC]$, on peut affirmer $AD = AC - CD$. Puisque ABC est isocèle en A, on a aussi $AC = AB$, d'où l'égalité

   $$AD = AB - CD.$$

   La loi des sinus dans le triangle BCD donne $\frac{CD}{\sin\frac{\pi}{5}} = \frac{BD}{\sin\frac{2\pi}{5}} \overset{\text{formule}}{\underset{\text{duplication}}{=}} \frac{BD}{2\eta\sin\frac{\pi}{5}} \overset{\text{question } a}{=} \frac{\frac{AB}{2\eta}}{2\eta\sin\frac{\pi}{5}}$, d'où $CD = \frac{AB}{4\eta^2}$ et

   $$AD = AB\left(1 - \frac{1}{4\eta^2}\right).$$

   (c) En utilisant les questions a et b, l'égalité des longueurs AD et BD mène à l'équation suivante (après simplification par AB) :

   $$\frac{1}{2\eta} = 1 - \frac{1}{4\eta^2}, \ \textit{i. e.}\ 4\eta^2 - 2\eta - 1 = 0.$$

   Le trinôme se réécrit en $\left(2\eta - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$, d'où ses racines $\frac{1\pm\sqrt{5}}{4}$. Puisque η est positif ($\frac{\pi}{5}$ est dans le premier quadrant), on obtient finalement

   $$\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \simeq 0.809.$$

3. Soit r un réel comme dans l'énoncé, *i. e.* tel que $\cos r = \cos 3r$. D'après le cours, deux arguments ayant même cosinus sont égaux ou opposés *modulo* 2π. Il y a donc un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $r = \pm 3r + 2k\pi$, ce qui se réécrit $r = -k\pi$ ou $r = k\frac{\pi}{2}$. Dans tous les cas, r est un multiple entier de $\frac{\pi}{2}$.

Soit réciproquement $r \in \mathbb{Z}\frac{\pi}{2}$, mettons $r = m\frac{\pi}{2}$ avec $m\mathbb{Z}$. Si l'entier m est impair, alors r comme son triple a un cosinus nul ; si m est pair, disons $m = 2n$ avec $n \in \mathbb{Z}$, alors

$$\cos 3r = \cos 3n\pi = (-1)^{3n} = \left[(-1)^3\right]^n = (-1)^n = \cos n\pi = \cos r.$$

Dans tout les cas, le réel r satisfait l'équation $\cos r = \cos 3r$.

Conclusion : les réels cherchés sont les multiples entiers de l'angle droit. Pour les représenter sur le cercle trigo, on les regarde *modulo* 2π : il reste 0, $\pm\frac{\pi}{2}$ et π.

Remarque : on a raisonné par ***analyse-synthèse*** ou par ***conditions nécessaires et suffisantes***. 1) que *doit* vérifier une solution ? 2) est-ce que les conditions trouvées *garantissent* que l'on a une solution ?

4. On aimerait bien avoir une équation de la forme $\cos\heartsuit = \cos\spadesuit$: il suffit pour cela de connaître ses lignes trigon usuelles, en particulier $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6}$.

Soit κ un réel. Il satisfait l'équation de l'énoncé ssi $3\kappa - \frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{6}$ ont même cosinus, *i. e.* ssi $3\kappa - \frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{6}$ sont égaux ou opposés *modulo* 2π, *i. e.* ssi il y a un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $3\kappa - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou s'il y a un entier $l \in \mathbb{Z}$ tel que $3\kappa - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$. Le premier cas équivaut à l'égalité $\kappa = \frac{5\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3}$, le second à celle $\kappa = \frac{\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3}$.

Pour représenter ces solutions sur le cercle trigo, on rajoute aux solutions $\frac{\pi}{36}$ et $\frac{5\pi}{36}$ des multiples de $\frac{2\pi}{3}$, ce qui donne tous les réels cherchés (*modulo* 2π) :

$$\frac{\pi}{36},\quad \frac{5\pi}{36},\quad \frac{25\pi}{36},\quad \frac{29\pi}{36},\quad \frac{49\pi}{36} = -\frac{23\pi}{36},\quad \frac{53\pi}{36} = -\frac{19\pi}{36}.$$

5. Considérons un tel réel τ. Deux tangentes étant égales ssi leur arguments sont égaux *modulo* π, on en déduit un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $2\tau + 1 = \tau + 1 + k\pi$, d'où $\tau = k\pi$; or ce dernier est un multiple de π, ce qui est exclu par hypothèse.

6. On utilise les formules de duplication appliquée à $\frac{\rho}{2}$:

$$\frac{\sin\rho}{1+\cos\rho} = \frac{\sin 2\frac{\rho}{2}}{1+\cos 2\frac{\rho}{2}} = \frac{2\sin\frac{\rho}{2}\cos\frac{\rho}{2}}{1+\left(2\cos^2\frac{\rho}{2}-1\right)} = \frac{\sin\frac{\rho}{2}}{\cos\frac{\rho}{2}} = \tan\frac{\rho}{2}.$$

Par ailleurs, l'égalité $\frac{\sin\rho}{1+\cos\rho} \stackrel{?}{=} \frac{1-\cos\rho}{\sin\rho}$ est équivalente à $\sin\rho\sin\rho \stackrel{?}{=} (1+\cos\rho)(1-\cos\rho)$, ou encore à $\sin^2\rho = 1-\cos^2\rho$, ce qui est vrai.

La tangente de $\frac{\rho}{2}$ n'a pas de sens pour $\frac{\rho}{2} = \pm\frac{\pi}{2}\ [\pi]$, *i. e.* pour $\rho = \pm\pi = \pi\ [2\pi]$, ou encore pour $\cos\rho = -1$, ce qui est cohérent avec l'égalité $\tan\frac{\rho}{2} = \frac{\sin\rho}{1+\cos\rho}$ (le dénominateur s'annule exactement quand le truc dans la tangente vaut $\frac{\pi}{2} \mod \pi$). En revanche, la fraction $\frac{1-\cos\rho}{\sin\rho}$ n'est pas définie pour $\rho = 0\ [\pi]$ (l'égalité que nous venons d'établir montre cependant que cette dernière fraction se prolonge sur $2\pi\mathbb{Z}$).

7. Fixons un réel f. On applique les formules de duplications à $g := \frac{f}{2}$ et on essaie de faire apparaître du $\tan\frac{f}{2} = \frac{\sin g}{\cos g}$:

$$\begin{aligned}
\sin f &= \sin 2g = 2\sin g\cos g = 2\frac{\sin g}{\cos g}\cos^2 g = \frac{2\tan g}{\frac{1}{\cos^2 g}} = \frac{2\tan g}{1+\tan^2 g},\\
\cos f &= \cos 2g = \cos^2 g - \sin^2 g = \frac{1-\frac{\sin^2 g}{\cos^2 g}}{\frac{1}{\cos^2 g}} = \frac{1-\tan^2 g}{1+\tan^2 g},\\
\tan f &= \tan 2g = \frac{2\tan g}{1-\tan^2 g}.
\end{aligned}$$

Les identités trouvées pour sin et cos font sens pour tout f (le dénominateur $1+\tan^2 g$ ne peut s'annuler car il est toujours supérieur à 1). En revanche, le dénominateur $1-\tan^2 g$ s'annule ssi $\tan g = \pm 1 = \tan\left(\pm\frac{\pi}{4}\right)$, *i. e.* ssi $g = \pm\frac{\pi}{4}\ [\pi]$, ou encore ssi $2g = \pm\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$, ce qui définit précisément les valeurs de f pour lesquelles $\tan f$ n'est pas définie.

8. Prenons un réel o. On a les équivalences

$$\begin{aligned}
3\cos o + 2\sin^2 o &= 3\\
\iff 3\cos o + 2\left(1-\cos^2 o\right) &= 3\\
\underset{c:=\cos o}{\overset{\text{poser}}{\iff}} 2c^2 - 3c + 1 &= 0\\
\iff (c-1)(2c-1) &= 0\\
\iff \left\{\text{ou}\begin{array}{l} c = 1\\ c = \frac{1}{2}\end{array}\right.\\
\iff \left\{\text{ou}\begin{array}{l} \cos o = \cos 0\\ \cos o = \cos\frac{\pi}{6}\end{array}\right.\\
\iff \left\{\text{ou}\begin{array}{l} o = 0\ [2\pi]\\ o = \pm\frac{\pi}{6}\ [2\pi]\end{array}\right. &.
\end{aligned}$$

Les réels cherchés sont donc (*modulo* 2π) $-\frac{\pi}{6}$, 0 et $\frac{\pi}{6}$.

9. Invoquons un réel.σ dont la tangente est bien définie. On a les équivalences

$$\tan\sigma = \sin\sigma \iff \frac{\sin\sigma}{\cos\sigma} = \sin\sigma \iff \left\{\text{ou}\begin{array}{l}\sin\sigma = 0\\ \cos\sigma = 1\end{array}\right. \iff \left\{\text{ou}\begin{array}{l}\sigma = 0\ \ [\pi]\\ \sigma = 0\ \ [2\pi]\end{array}\right. \iff \sigma = 0\ \ [\pi]\,.$$

10. Observer que l'équation proposée est homogène en $\binom{\cos\nu}{\sin\nu}$: il sera donc judicieux de normaliser par $\cos^2\nu$ (ou $\sin^2\nu$) afin d'obtenir un trinôme quadratique. Allons-y.

Considérons un réel ν satifaisant l'équation donnée. Si son sinus s'annule, alors l'équation se réécrit $\cos^2\nu = 0$, ce qui est impossible (un réel ne peut avoir à la fois son sinus et son cosinus nuls). On peut donc diviser l'équation par $\sin^2\nu$, ce qui donne $3 = \cot^2\nu - 2\cot\nu$, *i. e.* $(\cot\nu - 1)^2 = 3 + 1$, ou encore $\cot\nu = 1 \pm \sqrt{4}$. Cette dernière égalité équivaut à $\tan\nu = -1 = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ ou $\tan\nu = 3 = \tan\operatorname{atn}3$ (où le réel $\operatorname{atn}3$ vaut environ $72°$), *i. e.* $\nu = -\frac{\pi}{4}\ \ [\pi]$ ou $\nu = \operatorname{atn}3\ \ [\pi]$.

Réciproquement, si ν vaut (*modulo* π) l'un des deux réels $-\frac{\pi}{4}$ ou $\operatorname{atn}3$, on peut remonter les équivalences ci-dessus pour aboutir à l'équation de départ divisée par $\sin^2\nu$, d'où en multipliant par $\sin^2\nu$ l'équation de départ.

Finalement, les réels cherchés sont (*modulo* π) $-\frac{\pi}{4}$ et $\operatorname{atn}3 \simeq 72°$.

11. L'équation n'est pas homogène en $\binom{\cos\chi}{\sin\chi}$ mais peut le devenir si l'on multiplie le membre de droite par $1 = \sin^2\chi + \cos^2\chi$. Il sera alors judicieux de normaliser par $\sin^4\chi$ ou $\cos^4\chi$.

Donnons-nous un réel.ζ de cosinus non nul. On a alors les équivalences

$$\begin{array}{rcl}
\sin^4\zeta + \cos^4\zeta &=& \sin\zeta\cos\zeta.\\
\iff \sin^4\zeta + \cos^4\zeta &=& \left(\sin^2\zeta + \cos^2\zeta\right)\sin\zeta\cos\zeta\\
\iff \dfrac{\sin^4\zeta + \cos^4\zeta}{\cos^4\zeta} &=& \dfrac{\left(\sin^2\zeta + \cos^2\zeta\right)\sin\zeta\cos\zeta}{\cos^4\zeta}\\
\iff \tan^4\zeta + 1 &=& \tan^3\zeta + \tan\zeta\\
\underset{t:=\tan\zeta}{\overset{\text{poser}}{\iff}} t^4 - t^3 &=& t - 1\\
\iff t^3(t-1) &=& (t-1)\\
\iff \left\{\text{ou}\begin{array}{l}t^3 = 1\\ t = 1\end{array}\right. && \\
\iff t^3 &=& 1\\
\overset{t \text{ est réel}}{\iff} t &=& 1\\
\iff \tan\zeta &=& \tan\dfrac{\pi}{4}\\
\iff \zeta &=& \dfrac{\pi}{4}\ \ [\pi]\,.
\end{array}$$

Par ailleurs, si ζ est un réel de cosinus nul, il ne peut vérifier l'équation étudiée car il serait alors de sinus nul.

Finalement, en mettant ensemble les deux cas ci-dessus, on en déduit que les réels cherchés sont les valeurs *modulo* π de $\frac{\pi}{4}$.

12. La fraction $\frac{\Gamma-\Delta}{1+\Gamma\Delta}$ doit évoquer la formule d'addition de la tangente. Il est donc judicieux d'écrire nos treize réels sous la forme de tangentes, mettons de treize angles $a_0 < a_1 < \cdots < a_{12}$ tous compris dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. On veut alors trouver un angle a_i et un angle a_j tels que $0 < \tan(a_i - a_j) < 2 - \sqrt{3}$. L'inégalité de gauche ne pose aucun souci (il suffit de prendre $i < j$). Tout le problème revient donc à trouver deux indices $i < j$ tels que $\tan(a_i - a_j) < 2 - \sqrt{3}$. On se rappellera que le réel $2 - \sqrt{3}$ n'est autre que la tangente de $\frac{\pi}{12}$ (*cf.* exo 1).

Or, lorsque $i < j$, l'argument $a_i - a_j$ reste dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ où la fonction tan préserve l'ordre $\leq$; l'inégalité $\tan(a_i - a_j) < \tan\frac{\pi}{12}$ équivaudra donc à $a_i - a_j < \frac{\pi}{12}$. Par conséquent, le problème revient à déterminer deux indices $i < j$ tels que $a_i - a_j < \frac{\pi}{12}$, ce qui équivaut à dire que la *plus petite* des différences $\frac{a_i}{\pi} - \frac{a_j}{\pi}$ pour $i < j$ est strictement inférieure à $\frac{1}{12}$.

En rangeant les treize angles $\frac{a_i}{12}$ de $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ dans douze intervalles consécutifs de même longueurs $\frac{1}{12}$, on voit que l'un de ces intervalles contient deux $\frac{a_i}{\pi}$ distincts, dont la différence sera alors plus petite que la longueur de l'intervalle considérer – ce qu'il fallait démontrer.