Polynômes

(T. G. 19)

1. Développons $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ où les a_i sont réels. On a alors l'égalité

$$P\left(\overline{\lambda}\right) = \sum_{i=0}^{n} a_i \overline{\lambda}^i = \overline{\sum_{i=0}^{n} a_i \lambda^i} = \overline{P(\lambda)}.$$

En remplaçant P par ses dérivées successives (qui restent dans $\mathbf{R}[X]$), on obtient (par le même calcul) $\forall k \in \mathbf{N},\ P^{(k)}\left(\overline{\lambda}\right) = \overline{P^{(k)}(\lambda)}$. On en déduit l'équivalence $P^{(k)}(\lambda) = 0 \iff P^{(k)}\left(\overline{\lambda}\right) = 0$ pour tout entier $k \geq 0$, ce qui conclut (d'après la caractérisation de l'ordre par les dérivées).

2. Soit $z \in \mathbf{C}$. Alors le polynôme $X^2 - zX + 1$ divise $X^4 - X + z$ ssi le reste de la division euclidienne (de $X^4 - X + z$ par $X^2 - zX + 1$) est nul. Or la division s'écrit

$$X^4 - X + z = \left(X^2 + Xz + z^2 - 1\right)\left(X^2 - zX + 1\right) + \left(\left(z^3 - 2z - 1\right)X - z^2 + z + 1\right).$$

La divisibilité cherchée équivaut donc à $\begin{cases} z^3 - 2z - 1 = 0 \\ -z^2 + z + 1 = 0 \end{cases}$, *i. e.* à ce que z soit racine de $X^3 - 2X - 1 = (X+1)\left(X^2 - X - 1\right)$ et de $-X^2 + X - 1$, ce qui revient à ce que z soit racine de $X^2 - X - 1$, *i. e.* à $z = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

3. Soit P un polynôme tel que $P \mid P'$. Prendre les degrés donne alors $\deg P \leq \deg P'$, ce qui est impossible si P est non nul. Réciproquement, le polynôme nul divise sa dérivée (qui est nulle).

Soit P un polynôme tel que $P' \mid P$. Soit $Q \in \mathbf{K}[X]$ tel que $P = QP'$. Supposons dans un premier temps $P \neq 0$. Alors prendre les degrés montre que Q est de degré 1, donc admet une unique racine – appelons-la λ. Montrons que P est une puissance de $X - \lambda$ (à son coefficient dominant près).

Soit μ un scalaire autre que λ. Notons ω l'ordre de μ de P. Alors l'ordre de μ du polynôme QP', vaut celui de μ de P' (puisque μ n'est pas racine de Q), *i. e.* $\omega - 1$ (sauf si $\omega = 0$) ; or P vaut QP', donc les ordres de μ de ces polynômes coïncident, d'où $\omega = \omega - 1$ (sauf si $\omega = 0$), ce qui force la nullité de ω. Par conséquent, aucun scalaire autre que λ n'est racine de P. En d'autres termes, la seule racine de P est λ. En scindant P dans $\mathbf{C}[X]$, on en déduit qu'il s'y décompose comme une puissance de $X - \lambda$ (multiplié par son coefficient dominant), comme annoncé.

Réciproquement, on a pour tout $(a, C, n) \in \mathbf{K}^2 \times \mathbf{N}$ la divisibilité

$$\left[C(X-a)^n\right]' = Cn(X-a)^{n-1} \mid C(X-a)^n.$$

4. Le diviseur voulu se factorise $2X^3 + 3X^2 + X = X\left(2X^2 + 3X + 1\right) = X(2X+1)(X+1)$, donc il suffit de montrer que le multiple voulu est divisible par X, $2X+1$ et $X+1$, *i. e.* qu'il s'annule en 0, -1 et $-\frac{1}{2}$. Vérifions-le : on a

$$\begin{aligned} M(0) &= (1)^{2n} - 0^{2n} - 2 \cdot 0 - 1 = 1 - 1 = 0, \\ M(1) &= (1-1)^{2n} - (-1)^{2n} - 2(-1) - 1 = 0 - 1 + 2 - 1 = 0 \text{ et} \\ M\left(-\frac{1}{2}\right) &= \left(-\frac{1}{2} + 1\right)^{2n} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{2n} - 2\left(-\frac{1}{2}\right) - 1 = \frac{1}{2^{2n}} - \frac{1}{2^{2n}} + 1 - 1 = 0, \text{ ce qui conclut.} \end{aligned}$$

Calculons les dérivées successives de $P := nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$ et montrons que les trois premières s'annulent en 1 (ce qui revient à montrer la nullité de leurs sommes de coefficients) : on a

$$\begin{aligned} P(1) &= n - (n+2) + (n+2) - n = 0, \\ P'(1) &= n(n+2) - (n+2)(n+1) + (n+2) = 0 \text{ et} \\ P''(1) &= n(n+2)(n+1) - (n+2)(n+1)n = 0, \text{ ce qui conclut.} \end{aligned}$$

5. Écrivons la première division $X^n-8X+3=\left(X^2-3X+2\right)Q+R$ où le reste R est de degré <2, *i. e.* de la forme $aX+b$ pour certains scalaires a et b que l'on veut justement déterminer. Pour se débarrasser du quotient, on tue le facteur devant $X^2-3X+2=(X-1)(X-2)$, donc on évalue en 1 et en 2 (séparément), ce qui donne $\begin{cases} 1-8+3=a+b \\ 2^n-16+3=2a+b \end{cases}$, *i. e.* $\begin{cases} b=-4-a \\ 2a+(-4-a)=2^n-13 \end{cases}$, *i. e.* $\begin{cases} b=2^n-13 \\ a=9-2^n \end{cases}$.

Écrivons la seconde division $X^n-8X+3=(X-3)^2Q+(cx+d)$. Évaluer en 3 donne $3^n-24+3=3c+d$. Pour avoir une autre équation, on dérive d'abord puis on évalue en 3 (puisque 3 est d'ordre au moins 2 de $(X-3)^2Q$, il est d'ordre au moins 1 pour sa dérivée, donc annule cette dernière), ce qui donne $n3^{n-1}-8=c$, d'où

$$d=3^n-21-3c=3^n-21-3\left(n3^{n-1}-8\right)=3-n3^n=3\left(1-n3^{n-1}\right).$$

6. Écrivons la première division $P=(X-a)(X-b)Q+(uX+v)$ où u et v sont des scalaires à déterminer. Évaluer en a et en b (séparément) donne $\begin{cases} au+v=P(a) \\ bu+v=P(b) \end{cases}$, ce qui se résout en $u=\frac{P(b)-P(a)}{b-a}$ et $v=\frac{bP(a)-aP(b)}{b-a}$.

Écrivons la seconde division $P=(X-a)^2Q+(rX+s)$ où r et s sont des scalaires à déterminer. Évaluer en a donne $P(a)=ra+s$, dériver puis évaluer en a donne $P'(a)=r$, d'où $s=P(a)-aP'(a)$.

On aurait également pu appliquer le cas précédent $u=\frac{P(b)-P(a)}{b-a}$ et "faire tendre b vers a", ce qui aurait redonné $r=P'(a)$ puis $s=P(a)-ar$.

7. Notons f l'application considérée

Montrons déjà que f est linéaire. Soient $(P,P^*)\in\mathbf{K}[X]^2$ et $\lambda\in\mathbf{K}$. Écrivons les divisions euclidiennes proposées : $P=(X-\lambda)^\alpha Q+R$ et $P^*=(X-\lambda)^\alpha Q^*+R^*$. On a alors $\lambda P+P^*=(X-\lambda)^\alpha(\lambda Q+Q^*)+(\lambda R+R^*)$ où le polynôme $\lambda R+R^*$ est de degré $\leq\max\{\deg\lambda R,\deg R^*\}\leq\max\{\alpha-1,\alpha-1\}=\alpha-1$, ce qui montrer que l'égalité précédente est bien la division euclidienne de $\lambda P+P^*$ par $(X-\lambda)^\alpha$. On raisonnerait exactement de même pour $(X-\mu)^\beta$ et l'on en déduirait alors la linéarité de f.

Montrons alors que la restriction de f à $\mathbf{K}_{\alpha+\beta-1}[X]$ est surjective. Les dimensions valant $\alpha+\beta$ au départ comme à l'arrivée[1], il suffit de montrer son injectivité. Soit donc $P\in\operatorname{Ker} f_{|\mathbf{K}_{\alpha+\beta-1}[X]}$. Alors P est un polynôme divisible par $(X-\lambda)^\alpha$ et $(X-\mu)^\beta$, donc par leur produit, d'où la comparaison $\alpha+\beta\leq\deg P$ (sauf si P est nul) qui contredit l'appartenance $P\in\mathbf{K}_{\alpha+\beta-1}[X]$ et force par conséquent la nullité de P, *c. q. f. d.*.

8. Notons P le polynôme considéré. On demande l'ordre de 1 comme racine de P. Essayons donc de factoriser $X-1$ autant de fois que possible dans P. On a les égalités

$$\begin{aligned} P &= X^{10}-2X^9+X^8-2X^6+4X^5-2X^4+X^2-2X+1 \\ &= X^8\left(X^2-2X+1\right)-2X^4\left(X^2-2X+1\right)+\left(X^2-2X+1\right) \\ &= \left(X^8-2X^4+1\right)(X-1)^2 \\ &= \left(X^4-1\right)^2(X-1)^2 \\ &= \left(X^2+1\right)^2\left(X^2-1\right)^2(X-1)^2 \\ &= \underbrace{\left(X^2+1\right)^2(X+1)^2}_{\text{ne s'annule pas en 1}}(X-1)^4, \end{aligned}$$

ce qui montre que l'ordre cherché vaut 4.

Sanity check : vérifions à la main que 1 annule les dérivées successives de P jusqu'à l'ordre 4. On a les égalités

$$\begin{aligned} P(1) &= 1-2+1-2+4-2+1-2+1=0, \\ P'(1) &= 10-18+8-12+20-8+2-2=0, \\ P''(1) &= 90-144+56-60+80-24+2=0, \\ P'''(1) &= 720-1008+336-240+240-48=0 \text{ et} \\ P''''(1) &= 5040-6048+1680-720+480-48=384\neq 0. \end{aligned}$$

[1] À l'arrivée, on a un produit espace vectoriel qui est un espace vectoriel pour les lois définies "coordonnée par coordonnée". Or on pourrait montrer que $\dim(E\times F)=\dim E+\dim F$ pour tous espaces vectoriels E et F de dimensions finies.

9. On commence par scinder $P=C\prod_{i=1}^{r}(X-\lambda_i)^{\omega_i}$ où les λ_i sont *distincts* (on peut car tout polynôme complexe se scinde). On poursuit alors comme dans le cours : les polynômes $C\prod_{i=1}^{r}(X-\lambda_i)^{\omega_i}$ et $\overline{C}\prod_{i=1}^{r}\left(X-\overline{\lambda_i}\right)^{\omega_i}$ coïncident sur $\mathbf{R}$ (qui est infini), donc sont égaux.

L'égalité des coefficients dominants montre que C est réel.

L'égalité des ensembles des racines s'écrit $\{\lambda_1,\lambda_2...,\lambda_r\}=\left\{\overline{\lambda_1},\overline{\lambda_2},...,\overline{\lambda_r}\right\}$. Ces ensembles ayant chacun r éléments (la conjugaison est injective), on en déduit que les familles $(\lambda_1,\lambda_2...,\lambda_r)=\left(\overline{\lambda_1},\overline{\lambda_2},...,\overline{\lambda_r}\right)$ sont identiques *à permutation près*. On peut donc invoquer une permutation σ de l'ensemble $I:=\{1,2,...,r\}$ des indices telle que $\forall x\in I,\ \lambda_x=\overline{\lambda_{\sigma(x)}}$. Soit $i\in I$. L'égalité précédente devient après conjugaison $\lambda_{\sigma(i)}=\overline{\lambda_i}$; or on sait aussi (remplacer x par $\sigma(i)$) que $\lambda_{\sigma(i)}=\overline{\lambda_{\sigma(\sigma(i))}}$, d'où l'égalité $\lambda_{\sigma^2(i)}=\lambda_i$. Ainsi, si $\lambda_i\notin\mathbf{R}$, la permutation σ échange les racines λ_i et $\overline{\lambda_i}$. Nous pouvons par conséquent renommer les racines $\lambda_1,\lambda_2,...\lambda_r$ comme suit :

$$\underbrace{x_1,x_2,...,x_p}_{\text{racines réelles}},\quad\underbrace{z_1,\overline{z_1},z_2,\overline{z_2},...,z_q,\overline{z_q}}_{\text{racines deux à deux conjuguées}}$$

pour certains entiers p et q (tels que $p+2q=r$).

Prenons enfin en compte les ordres. L'égalité des ensembles de couples $\left\{\binom{\lambda_1}{\omega_1},\binom{\lambda_2}{\omega_2},...\binom{\lambda_r}{\omega_r}\right\}=\left\{\overline{\binom{\lambda_1}{\omega_1}},\overline{\binom{\lambda_2}{\omega_2}},...\overline{\binom{\lambda_r}{\omega_r}}\right\}$ nous donne une permutation σ de I telle que $\forall x\in I,\ \binom{\lambda_x}{\omega_x}=\overline{\binom{\lambda_{\sigma(x)}}{\omega_{\sigma(x)}}}$, ce qui affine le raisonnement précédent : les racines z_k et $\overline{z_k}$ ont même ordre pour tout $k\in\{1,2,...,q\}$. On en déduit l'égalité (en notant pour tout ξ complexe $\omega(\xi)$ l'ordre de ξ comme racine de P)

$$P=\underbrace{\prod_{j=1}^{p}(X-x_i)^{\omega(x_i)}}_{\text{polynôme réel}}\times\prod_{k=1}^{q}\left[(X-z_k)(X-\overline{z_k})\right]^{\omega(z_k)}.$$

Il suffit donc de montrer que le polynôme $(X-\lambda)\left(X-\overline{\lambda}\right)$ est réel pour tout complexe λ, ce qui est clair en développant $(X-\lambda)\left(X-\overline{\lambda}\right)=X^2-2\operatorname{Re}\lambda+|\lambda|$.

10. On veut montrer que l'application $f:A\mapsto\sum_{n=0}^{\deg A}\frac{A^{(n)}(0)}{n!}X^n$ coïncident avec l'identité de $\mathbf{K}[X]$. Cela revient à montrer que, pour tout entier $N\geq 0$, la restriction de f à $\mathbf{K}_N[X]$ coïncide avec l'identité de $\mathbf{K}_N[X]$. Soit donc $d\in\mathbf{N}$ et notons f_d la restriction de f à $\mathbf{K}_d[X]$. Si l'on montre que f_d est linéaire et coïncident avec $\mathrm{Id}_{\mathbf{K}_d[X]}$ sur une base de $\mathbf{K}_d[X]$, on aura terminé.

Montrons la coïncidence sur la base $\left(\frac{X^a}{a!}\right)_{0\leq a\leq d}$ de $\mathbf{K}_d[X]$ suggérée par l'énoncé. L'intérêt de cette base est qu'elle se comporte bien vis-à-vis de la dérivation : on a en effet les égalités

$$\left[\frac{X^a}{a!}\right]'=\frac{X^{a-1}}{(a-1)!}\text{ pour tout entier }a\in\mathbf{N}^*,$$

d'où par une récurrence immédiate l'égalité $\left[\frac{X^a}{a!}\right]^{(n)}=\begin{cases}\frac{X^{a-n}}{(a-n)!}\text{ si }n\leq a\\ 0\text{ sinon}\end{cases}$ pour tout entiers naturels a et n. On en déduit pour tout $a\in\mathbf{N}$ les égalités

$$\begin{aligned}f_d\left(\frac{X^a}{a!}\right)&=\sum_{n=0}^{\deg\frac{X^a}{a!}}\frac{\left[\frac{X^a}{a!}\right]^{(n)}(0)}{n!}X^n=\sum_{n=0}^{a}\left(\frac{X^{a-n}}{(a-n)!}(0)\right)\frac{X^n}{n!}\\&=\sum_{n=0}^{a}\frac{0^{a-n}}{(a-n)!}\frac{X^n}{n!}=\sum_{n=0}^{a}\frac{\delta_a^n}{(a-n)!}\frac{X^n}{n!}=\frac{X^a}{a!}\\&=\mathrm{Id}\left(\frac{X^a}{a!}\right),\ c.\ q.\ f.\ d..\end{aligned}$$

Montrons que f_d est linéaire.

Commençons par une remarque. Soit $\Pi\in\mathbf{K}_d[X]$. Alors la dérivée $\Pi^{(n)}$ est nulle pour tout entier $n>\deg\Pi$, ce qui montre que l'on peut remplacer dans la somme $f(\Pi)=\sum_{n=0}^{\deg\Pi}\frac{\Pi^{(n)}(0)}{n!}X^n$ l'indice maximal $\deg\Pi$ par n'importe quel entier $\geq\deg\Pi$, par exemple d.

Soient à présent $(A,B) \in \mathbf{K}_d[X]^2$ et $\lambda \in \mathbf{K}$. On a alors les égalités

$$\begin{aligned} f(\lambda A + B) &= \sum_{n=0}^{d} \frac{[\lambda A + B]^{(n)}(0)}{n!} X^n = \sum_{n=0}^{d} \frac{\left[\lambda A^{(n)} + B^{(n)}\right](0)}{n!} X^n \\ &= \lambda \sum_{n=0}^{d} \frac{A^{(n)}(0)}{n!} X^n + \sum_{n=0}^{d} \frac{B^{(n)}(0)}{n!} X^n \\ &= \lambda f(A) + f(B),\ c.\ q.\ f.\ d.. \end{aligned}$$

L'énoncé demande ensuite d'établir la surjectivité de l'application $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{K}[X] & \longrightarrow & \mathbf{K}^{d+1} \\ P & \longmapsto & \left(P^{(i)}(0)\right)_{0 \leq i \leq d} \end{array} \right.$. Montrons en fait que sa restriction à $\mathbf{K}_d[X]$ (appelons-la δ) est surjective. Puisque δ est linéaire (aisé à vérifier), il revient à montrer que δ est injective. Soit donc $P \in \operatorname{Ker} \delta$. Alors ce qui précède permet d'affirmer que $P = \sum_{n=0}^{d} \frac{P^{(n)}(0)}{n!} X^n = \sum_{n=0}^{d} \frac{0}{n!} X^n = 0$, ce qui conclut.