Polynômes

(T. G. 19)

1. *Soit P un polynôme réel et λ un complexe P. Montrer que λ* et *$\overline{\lambda}$ ont même ordre comme racine de P.*
2. *Déterminer tous les complexes z tels que $X^2 - zX + 1$ divise $X^4 - X + z$.*
3. *Trouver tous les polynômes qui sont multiples (resp. diviseurs) de leur dérivée.*
4. *Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Montrer que $2X^3 + 3X^2 + X$ divise $(X+1)^{2n} - X^{2n} - 2X - 1$ et que $nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$ est divisible par $(X-1)^3$.*
5. *Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Déterminer les restes des divisions euclidiennes de $X^n - 8X + 3$ par $X^2 - 3X + 2$ et par $X^2 - 6X + 9$.*
6. *Soit P un polynôme, soient a et b deux scalaires distincts. Trouver les restes des divisions de P par $(X-a)(X-b)$ et par $(X-a)^2$.*
7. *Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbf{N}^2$, soient λ et μ deux scalaires distincts. Montrer la surjectivité de l'application $\mathbf{K}[X] \longrightarrow \mathbf{K}_{\alpha-1}[X] \times \mathbf{K}_{\beta-1}[X]$ qui à un polynôme P associe le couple formé des restes des divisions de P par $(X-\lambda)^\alpha$ et par $(X-\mu)^\beta$.*
8. *Trouver le plus grand entier $n \geq 0$ tel que $(X-1)^n$ divise $X^{10} - 2X^9 + X^8 - 2X^6 + 4X^5 - 2X^4 + X^2 - 2X + 1$.*
9. *Soit $P \in \mathbf{C}[X]$ tel que $\forall t \in \mathbf{R},\ P(t) \in \mathbf{R}$. Montrer que $P \in \mathbf{R}[X]$.*
10. *Soit P un polynôme. Montrer que $P = \sum_{n=0}^{\deg P} \frac{P^{(n)}(0)}{n!} X^n$.* (hint : on pourra utiliser la base $\left(\frac{X^n}{n!}\right)$)
    Soit $d \in \mathbf{N}$. Montrer, pour toute famille $(\lambda_i) \in \mathbf{K}^{d+1}$, l'existence d'un polynôme P tel que $\forall i \in \{0, 1, ..., d\},\ P^{(i)}(0) = \lambda_i$.