Dimension finie

(T. G. 18)

1. Soit $x =: (a, b, c, d) \in \mathbf{K}^4$. On a les équivalences

$$\begin{aligned}
& x \text{ est une relation de liaison de la famille } \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \right) \\
\iff & a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\iff & \begin{cases} a + c + 5d = 0 \\ -a - b - 2c + d = 0 \\ a + 2b + 3c - 4d = 0 \end{cases} \overset{L_2 \leftarrow L_2 + L_3}{\iff} \begin{cases} a + c + 5d = 0 \\ b + c - 3d = 0 \\ a + 2b + 3c = 4d \end{cases} \overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\iff} \begin{cases} b = 3d - c \\ a = -c - 5d \\ (-c + 5d) + 2(3d - c) + 3c = 4d \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} b = 3d - c \\ a = -c - 5d \\ 7d = 0 \end{cases} \overset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\iff} \begin{cases} d = 0 \\ a = -c \\ b = -c \end{cases} \iff \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c \\ -c \\ c \\ 0 \end{pmatrix} \iff x = -c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\iff & \exists \lambda \in \mathbf{K},\ x = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{array}{l} \boxed{\Longrightarrow} \text{ prendre } \lambda := -c \\ \boxed{\Longleftarrow} \text{ les cotes donnent } c = -\lambda \end{array} \right) \\
\iff & x = \operatorname{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, le sous-espace des relations cherché est la droite $\mathbf{K}(1, 1, -1, 0)$. **Sanity check** : vérifier que $(1, 1, -1, 0)$ est bien une relation de liaison, *i. e.* que le troisième vecteur vaut la somme des trois premiers.

2. Appelons f l'application donnée. On laisse au lecteur le soin de montrer que f est linéaire, ce qui peut être facilité en observant pour tout $(a, b, c) \in \mathbf{K}^3$ l'égalité

$$f \begin{pmatrix} b + c \\ a + b + c \\ a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (b + c) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Soit $x =: (a, b, c) \in \mathbf{K}^3$. On a alors les équivalences

$$\begin{aligned}
x \in \operatorname{Ker} f \iff & f(x) = 0 \iff \begin{cases} b + c = 0 \\ a + b + c = 0 \\ a = 0 \end{cases} \overset{L_1 \text{ dans } L_2}{\iff} \begin{cases} c = -b \\ a = 0 \\ a = 0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ -b \end{pmatrix} \\
\iff & x = b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \iff \exists \lambda \in \mathbf{K},\ x = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \iff x \in \operatorname{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.
\end{aligned}$$

On en déduit que le noyau de f est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(0, 1, -1)$.

L'observation du tout début montre que toute image par f appartient à $I := \operatorname{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, d'où l'inclusion $\operatorname{Im} f \subset I$. Montrons l'égalité en montrant l'égalité des dimensions. D'une part la famille

$\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$ est libre (si (λ,μ) est une relation de liaison, alors les abscisses donnent $\mu=0$ et les cotes $\lambda=0$), d'où $\dim I=2$, d'autre part la formule du rang donne

$$\dim \operatorname{Im} f=\dim \mathbf{K}^3-\dim \operatorname{Ker} f=3-1=2,\ c.\ q.\ f.\ d..$$

Sanity check : montrons à la main l'inclusion $I\subset \operatorname{Im} f$. Soit $y\in I$. Soit $(\lambda,\mu)\in\mathbf{K}^2$ tel que $y=\lambda\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$. On a alors $y=\begin{pmatrix}\lambda\\\lambda+\mu\\\mu\end{pmatrix}=f\begin{pmatrix}\mu\\\lambda\\0\end{pmatrix}\in\operatorname{Im} f,\ c.\ q.\ f.\ d..$

3. Notons V l'espace considéré. Soit $x=:(p,q,r,s)\in\mathbf{K}^4$. On a les équivalences

$$\begin{aligned}
x\in V &\iff \begin{cases}p+q-r+s=0\\ p-3q-2r=0\end{cases}\iff\begin{cases}s=r-p-q\\ p=3q+2r\end{cases}\\
&\overset{L_2\text{ dans }L_1}{\iff} \begin{cases}s=r-(3q+2r)-q\\ p=3q+2r\end{cases}\iff\begin{cases}s=-r-4q\\ p=3q+2r\end{cases}\\
&\iff \begin{pmatrix}p\\q\\r\\s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3q+2r\\q\\r\\-r-4q\end{pmatrix}\iff x=q\begin{pmatrix}3\\1\\0\\-4\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}2\\0\\1\\-1\end{pmatrix}\\
&\iff \exists\,(\lambda,\mu)\in\mathbf{K}^2,\ x=\lambda\begin{pmatrix}3\\1\\0\\-4\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}2\\0\\1\\-1\end{pmatrix}\quad\left(\begin{array}{r}\boxed{\Longrightarrow}\text{ prendre }(\lambda,\mu):=(q,r)\\ \boxed{\Longleftarrow}\text{ les abscisses donnent }q=\lambda\\ \text{et les cotes }r=\mu\end{array}\right)\\
&\iff x\in\operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix}3\\1\\0\\-4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}.
\end{aligned}$$

Or il est aidé de montrer que les deux vecteurs précédents forment une famille libre (lire les ordonnées et les cotes), d'où une base de V comme cherché.

Pour construire un supplémentaire de V, on complète la base ci-dessus en une base de $\mathbf{K}^4$ et on prend le Vect des vecteurs rajoutés. Rajoutons deux vecteurs avec beaucoup de 0 pour faciliter la vérification de la liberté, par exemple les deux premiers vecteurs de la base canonique de $\mathbf{K}^4$. Montrons que la famille obtenue est une base. Puisqu'elle est de longueur $\dim\mathbf{K}^4$, il suffit de montrer qu'elle est libre. Soit donc $(a,b,c,d)\in\mathbf{K}^4$ tels que

$$a\begin{pmatrix}3\\1\\0\\-4\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}2\\0\\1\\-1\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}=0.$$

Les cotes donnent $b=0$, puis les dernières coordonnées $-4a-b=0$, $i.\ e.$ $a=0$, puis les abscisses et ordonnées donnent $\begin{cases}3a+2b+c=0\\ a+d=0\end{cases}$, $i.\ e.$ $\begin{cases}c=0\\ d=0\end{cases}$. Par conséquent, l'espace $\operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$ est un supplémentaire de V.

Sanity check : les dimensions de V et du supplémentaire construit sont bien complémentaires à celle de $\mathbf{K}^4$ $(2+2=4)$.

4. Les trois vecteurs donnés dans le Vect de l'énoncé appartiennent tous à

$$V':=\left\{(a,b,c,d)\in\mathbf{K}^4\ ;\ a+c+d=0\right\},$$

donc leur Vect est inclus dans $\operatorname{Vect} V'$; or V' est clairement un s.-e. v., d'où $\operatorname{Vect} V'=V'$ et l'inclusion $V\subset V'$. Montrons que l'on a égalité en regardant les dimensions, ce qui donnera une équation linéaire de V. Il est aisé de montrer que les trois vecteurs donnés dans le Vect de l'énoncé forment une famille libre (les ordonnées montreraient que le premier coefficient d'une relation de liaison est nul, les cotes que le deuxième coefficient est nul puis les abscisses nous permettraient d'en déduire la nullité du troisième coefficient), d'où l'on déduit $\dim V = 3$. Or V' est le noyau de la forme linéaire non nulle $(a,b,c,d) \mapsto a+c+d$, donc V' est un hyperplan de $\mathbf{K}^4$, d'où $\dim V' = \dim\left(\mathbf{K}^4\right) - 1 = 4 - 1 = 3$, ce qu'il fallait démontrer.

Décrivons W comme un Vect. Soit $x =: (\lambda, \mu, \nu, \xi) \in \mathbf{K}^4$. On a les équivalences

$$\begin{aligned}
x \in W \quad & \iff \quad \lambda + \mu - \nu + 2\xi = 0 \\
& \iff \quad \nu = \lambda + \mu + 2\xi \\
& \iff \quad \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \lambda + \mu + 2\xi \\ \xi \end{pmatrix} \\
& \iff \quad x = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \xi \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\
& \iff \quad \exists\, (a,b,c) \in \mathbf{K}^3,\ x = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{array}{l} \boxed{\Longrightarrow} \text{ prendre } (a,b,c) := (\lambda, \mu, \xi) \\ \boxed{\Longleftarrow} \text{ les abscisses donnent } \lambda = a, \\ \text{les ordonnées donnent } \mu = b \text{ et les} \\ \text{dernières coordonnées } \xi = c \end{array} \right) \\
& \iff \quad x \in \operatorname{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.
\end{aligned}$$

Or il est aidé de montrer que les trois vecteurs précédents forment une famille libre (même argument que pour V), d'où une base de W comme cherché.

Décrivons $V \cap W$ comme un Vect. On a les équivalences

$$\begin{aligned}
x \in V \cap W \quad & \iff \quad \begin{cases} \lambda + \nu + \xi = 0 \\ \lambda + \mu - \nu + 2\xi = 0 \end{cases} \\
& \iff \quad \begin{cases} -\nu = \lambda + \xi \\ \lambda + \mu + (\lambda + \xi) + 2\xi = 0 \end{cases} \\
& \iff \quad \begin{cases} \nu = -\lambda - \xi \\ \mu = -2\lambda - 3\xi \end{cases} \\
& \iff \quad \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ -2\lambda - 3\xi \\ -\lambda - \xi \\ \xi \end{pmatrix} \\
& \iff \quad x = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \xi \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
& \iff \quad \exists\, (a,b) \in \mathbf{K}^2,\ x = a \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{array}{l} \boxed{\Longrightarrow} \text{ prendre } (a,b) := (-\lambda, -\mu) \\ \boxed{\Longleftarrow} \text{ les abscisses donnent } \lambda = -a \\ \text{et les dernières coordonnées } \xi = -b \end{array} \right) \\
& \iff \quad x \in \operatorname{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.
\end{aligned}$$

Or il est aidé de montrer que les deux vecteurs précédents forment une famille libre (lire les premières et quatrièmes coordonnées), d'où une base de $V \cap W$ comme cherché.

Sanity checks : vérifier d'une part que les deux vecteurs ci-dessus sont dans V et dans W (grâce aux équations linéaires), d'autre part la formule de Grassmann $\dim(V+W) \stackrel{?}{=} 3 + 3 - 2 = 4 = \dim \mathbf{K}^4$ (il suffirait de montrer que $V + W$ contient une famille génératrice, ce qui sera le cas si l'on trouve quatre vecteurs dans $V \cup W$ formant une famille libre, par exemple $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans W et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ dans V).

5. D'après la formule du rang, le rang d'une famille plus la dimension du s.-e. v. de ses relations de liaison vaut la longueur de la famille[1]. Nous allons par conséquent décrire le s.-e. v. des relations de la famille donnée – appelons-le R. Nous en déduirons le rang cherché comme valant $3 - \dim R$.

Soit $x =: (a, b, c) \in \mathbf{K}^3$. On a les équivalences

$$\begin{aligned}
x \in R \quad & \iff \quad a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ u \\ 3v \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ u \end{pmatrix} = 0 \\
& \iff \left\{ \begin{array}{c} a + 2b = 0 \\ a + ub - c = 0 \\ -a + 3vb + uc = 0 \end{array} \right. \overset{L_1 \text{ dans } L_2 \text{ et } L_3}{\iff} \left\{ \begin{array}{c} a = -2b \\ (-2b) + ub - c = 0 \\ (2b) + 3vb + uc = 0 \end{array} \right. \\
& \iff \left\{ \begin{array}{c} a = -2b \\ c = (u-2)\, b \\ (2+3v)\, b + uc = 0 \end{array} \right. \overset{L_2 \text{ dans } L_3}{\iff} \left\{ \begin{array}{c} a = -2b \\ c = (u-2)\, b \\ (2+3v)\, b + u\,(u-2)\, b = 0 \end{array} \right. \\
& \iff \left\{ \begin{array}{c} a = -2b \\ c = (u-2)\, b \\ b = 0 \text{ ou } \ (2+3v) + u\,(u-2) = 0 \end{array} \right. .
\end{aligned}$$

Nous sommes ainsi amenés à discuter deux cas.

Si le scalaire $(2+3v) + u\,(u-2)$ n'est pas nul, alors on a les équivalences

$$x \in R \iff \left\{ \begin{array}{c} a = -2b \\ c = (u-2)\, b \\ b = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} a = 0 \\ c = 0 \\ b = 0 \end{array} \right. \iff x = 0,$$

ce qui montre que R est le s.-e. v. nul et que le rang cherché vaut 3.

Dans le cas contraire, on a les équivalences

$$\begin{aligned}
x \in R \quad & \iff \quad \left\{ \begin{array}{c} a = -2b \\ c = (u-2)\, b \\ b = 0 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{c} a = -2b \\ c = (u-2)\, b \\ u^2 - 2u + 3v + 2 = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} a = 0 \\ c = 0 \\ b = 0 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{c} a = -2b \\ c = (u-2)\, b \end{array} \right. \\
& \iff \quad x = 0 \text{ ou } \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2b \\ b \\ (u-2)\, b \end{pmatrix} \iff x = 0 \text{ ou } x = b \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ u-2 \end{pmatrix} \\
& \iff \quad \exists \lambda \in \mathbf{K},\ x = \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ u-2 \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{array}{l} \boxed{\Longrightarrow} \text{ prendre } \lambda := 0 \text{ si } x = 0, \text{ prendre } \lambda := b \text{ sinon} \\ \boxed{\Longleftarrow} \text{ les abscisses donnent } b = \lambda, \text{ d'où } x = b\,(-2, 1, u-2) \end{array} \right) \\
& \iff \quad x \in \operatorname{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ u-2 \end{pmatrix} \right\}, \text{ ce qui montre que } R \text{ est la droite dirigée par le vecteur } \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ u-2 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

d'où l'on tire le rang cherché : 2.

Bonus : déterminons le lieu des paramètres vérifiant ce cas limite. On a les équivalences

$$(2+3v) + u\,(u-2) = 0 \iff (u-1)^2 + 3\left(v + \frac{1}{3}\right) = 0 \iff v + \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}\,(u-1)^2,$$

ce qui montre que ce lieu est la parabole de sommet $\left(1, -\frac{1}{3}\right)$ tournée vers les ordonnées négatives de paramètre $\frac{1}{6}$. On pourrait donc représenter la réponse au problème dans un plan avec u en abscisse et v en ordonnée en écrivant 2 sur la parabole et 3 ailleurs.

6.

(a) Soit $(a_i) \in \mathbf{K}^k$ tel que $\sum_{i=1}^k a_i \left|\operatorname{Id} - \lambda_i\right| = 0$. Soit $i_0 \in \{1, 2, ..., k\}$. Remarquer que la fonction $\left|\operatorname{Id} - \lambda_i\right|$ est dérivable en λ_{i_0} pour tout $i \neq i_0$; il en est donc de même pour la combinaison linéaire $\sum_{i \neq i_0} a_i \left|\operatorname{Id} - \lambda_i\right|$. Si a_{i_0} était non nul, la fonction $\left|\operatorname{Id} - \lambda_{i_0}\right| = \sum_{i \neq i_0} \frac{-a_i}{a_{i_0}} \left|\operatorname{Id} - \lambda_i\right|$ serait alors dérivable en λ_{i_0}, ce qui est faux. On a ainsi montré $\forall i \in \{1, 2, ..., k\},\ a_i = 0$, *c. q. f. d.*.

[1] si la famille s'écrit $(x_1, ..., x_n)$, utiliser l'application $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{K}^n & \longrightarrow & E \\ (\lambda_i) & \longmapsto & \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \end{array} \right.$

(b) Illustrons l'idée qui suit dans le cas $k=2$. Soit $(a,b,\lambda,\mu)\in\mathbf{K}^4$ tel que $\lambda\neq\mu$ et $ae^{\lambda\,\mathrm{Id}}+be^{\mu\,\mathrm{Id}}=0$. Dériver donne $\lambda ae^{\lambda\,\mathrm{Id}}+\mu be^{\mu\,\mathrm{Id}}=0$; en soustrayant la première égalité multipliée par λ, on obtient $b(\lambda-\mu)e^{\mu\,\mathrm{Id}}=0$, ce qui nous a permis de nous débarrasser d'un coefficient. Puisque $\lambda\neq\mu$, on en déduit $be^{\mu\,\mathrm{Id}}=0$, d'où $b=0$ (en évaluant en n'importe quel $t\in I$ puis en simplifiant par $e^{\mu t}$ qui est non nul). Généralisons.

Supposons par l'absurde que la famille $\left(e^{\lambda_i\,\mathrm{Id}}\right)$ soit liée. En retirant dans une relation de liaison les scalaires nuls, on obtient une relation de liaison dont *tous* les coefficients (et il en reste au moins un) sont *non nuls*. Cela montre que la partie

$$\left\{\operatorname{Card}I\ ;\ \emptyset\subsetneq I\subset\{1,2,...,k\},\ \exists(a_i)\in(\mathbf{K}^*)^I,\ \sum_{i\in I}a_ie^{\lambda_i\,\mathrm{Id}}=0\right\}$$

de $\mathbf{N}^*$ est non vide, donc admet un plus petit élément – notons m_0 ce minimum. Soient alors $I\subset\{1,2,...,k\}$ de cardinal m_0 et (a_i) une famille de scalaires tous non nuls indexée par I telle que $\sum_{i\in I}a_ie^{\lambda_i\,\mathrm{Id}}=0$. D'une part dériver donne $\sum_{i\in I}\lambda_ia_ie^{\lambda_i\,\mathrm{Id}}=0$, d'autre part fixer un $i_0\in I$ (on peut peut car $I\neq\emptyset$) et multiplier par λ_{i_0} donne $\sum_{i\in I}\lambda_{i_0}a_ie^{\lambda_i\,\mathrm{Id}}=0$, d'où par différence $\sum_{i\in I}(\lambda_i-\lambda_{i_0})a_ie^{\lambda_i\,\mathrm{Id}}=0$. Mais alors la famille $((\lambda_i-\lambda_{i_0})a_i)_{i\in I\setminus\{i_0\}}$ est une relation de liaison à coefficients tous non nuls (car les λ_i sont distincts et les a_i tous non nuls) et de longueur $\operatorname{Card}(I\setminus\{i_0\})=m_0-1$, ce qui contredit la minimalité de m_0.

(c) On raisonne comme ci-dessus. Soit par l'absurde une relation de liaison $(a_i)\in(\mathbf{K}^*)^I$ de longueur minimale $\sum_{i\in I}a_i\,\mathrm{Id}^{\lambda_i}=0$ (I est donc une partie non vide de $\{1,2,...,k\}$. Dériver puis multiplier par Id donne $\sum_{i\in I}a_i\lambda_i\,\mathrm{Id}^{\lambda_i}=0$; en fixant un $i_0\in I$ puis en soustrayant la première relation multipliée par λ_{i_0}, on obtient $\sum_{i\in I}a_i(\lambda_i-\lambda_{i_0})\,\mathrm{Id}^{\lambda_i}=0$, d'où une relation de liaison $(a_i(\lambda_i-\lambda_{i_0}))_{i\in I\setminus\{i_0\}}$ de longueur strictement plus petite, ce qui contredit la minimalité imposée.

(d) On reprend l'idée de la question 6b. Soit par l'absurde une relation de liaison $(a_i)\in(\mathbf{K}^*)^I$ de longueur minimale. L'analogue de la dérivation $f\mapsto f'$ est la dérivation discrète $(u_n)\mapsto(u_{n+1}-u_n)$. On obtient donc, à partir de $\sum_{i\in I}a_i(\lambda_i^n)=0$, l'égalité $0=\left(\sum_{i\in I}a_i\lambda_i^{n+1}\right)-\left(\sum_{i\in I}a_i\lambda_i^n\right)=\sum_{i\in I}a_i(\lambda_i-1)(\lambda_i^n)$. En fixant un $i_0\in I$ et en soustrayant la première relation multipliée par $\lambda_{i_0}-1$, on obtient $0=\sum_{i\in I}a_i(\lambda_i-\lambda_{i_0})(\lambda_i^n)$, d'où une relation de liaison $(a_i(\lambda_i-\lambda_{i_0}))_{i\in I\setminus\{i_0\}}$ de longueur strictement plus petite, ce qui contredit la minimalité imposée.

(e) On reprend l'idée de la question 6b. Soit par l'absurde une relation de liaison $(a_i)\in(\mathbf{K}^*)^I$ de longueur minimale. Pour changer les coefficients a_i, dériver serait ici peu commode : il faut chercher un autre moyen. En utilisant l'extractrice $(2n)$, on obtient $\sum_{i\in I}a_i(2n)^{\lambda_i}=0$; en fixant un indice $i_0\in I$ puis soustrayant la relation $\sum_{i\in I}a_i\left(n^{\lambda_i}\right)=0$ multipliée par $2^{\lambda_{i_0}}$, on obtient $\sum_{i\in I}a_i\left(2^{\lambda_i}-2^{\lambda_{i_0}}\right)\left(n^{\lambda_i}\right)=0$, d'où une relation de liaison $a_i\left(2^{\lambda_i}-2^{\lambda_{i_0}}\right)_{i\in I\setminus\{i_0\}}$ de longueur strictement plus petite, ce qui contredit la minimalité imposée.

7. Pour tout $i\in\{1,2,...,n\}$, notons b_i^* l'application "i-ième coordonnée dans la base (b_k)". Ainsi tout vecteur $v\in E$ s'écrit $v=\sum_{i=1}^n b_i^*(v)\,b_i$. Par ailleurs, les applications b_i^* étant chacune à valeurs dans $\mathbf{K}$, il suffit de montrer leur linéarité.

Soient $(x,y)\in E^2$ et $\lambda\in\mathbf{K}$. On a alors les égalités

$$\sum_{i=1}^n b_i^*(\lambda x+y)\,b_i=\lambda x+y=\lambda\sum_{i=1}^n b_i^*(x)\,b_i+\sum_{i=1}^n b_i^*(y)\,b_i=\sum_{i=1}^n(\lambda_ib_i^*(x)+b_i^*(y))\,b_i,$$

d'où par liberté de (b_i) l'égalité $b_i^*(\lambda x+y)=\lambda_ib_i^*(x)+b_i^*(y)$ pour tout $i\in\{1,2,...,n\}$, ce qui conclut.

8.

(a) Soit $x\in V+W$. Soit $(v,w)\in V\times W$ tel que $x=v+w$. Par hypothèse, on peut écrire $\begin{cases}v=\sum_{k=1}^r\lambda_ki_k+\sum_{i=1}^p\alpha_iv_i\\ w=\sum_{k=1}^r\mu_ki_k+\sum_{j=1}^q\beta_jw_j\end{cases}$ pour certaines familles de scalaires (λ_k), (μ_k), (α_i) et $\left(\beta_j\right)$, d'où l'égalité

$$x=\sum_{k=1}^r(\lambda_k+\mu_k)\,i_k+\sum_{i=1}^p\alpha_iv_i+\sum_{j=1}^q\beta_jw_j,$$

ce qui montre que la famille $(v_1,v_2,...,v_p,w_1,w_2,...,w_q,i_1,i_2,...,i_r)$ engendre tout $V+W$.

Soit $\left(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_q, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r\right) \in \mathbf{K}^{p+q+r}$ tel que

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i v_i + \sum_{j=1}^{q} \beta_j w_j + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k i_k = 0.$$

Alors le vecteur $\underbrace{\sum_{i=1}^{p} \alpha_i v_i}_{\in V} = \underbrace{\sum_{k=1}^{r} \left(-\lambda_k\right) i_k}_{\in V \cap W \subset W} - \underbrace{\sum_{j=1}^{q} \beta_j w_j}_{\in W}$ est dans $V \cap W = \operatorname{Vect}\{i_1, ..., i_r\}$, donc se décompose selon les i_k, mettons $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i v_i = \sum_{k=1}^{r} \gamma_k i_k$; mais alors la liberté de $(i_1, i_2, ..., i_r, v_1, v_2, ..., v_p)$ impose la nullité de tous les coefficients, en particulier des α_i. Par un argument de symétrie, on obtient la nullité des β_j. La relation de liaison devient alors $\sum_{k=1}^{r} \lambda_k i_k = 0$ et la liberté des i_k conclut à la nullité des λ_k.

Puisque $\dim(V+W)$ vaut la longueur de n'importe quelle base de $V+W$, nous pouvons d'après ce qui précède affirmer que

$$\dim(V+W) = p+q+r = (p+r)+(q+r)-r = \dim V + \dim W - \dim V \cap W, \ c.\ q.\ f.\ d..$$

(b) (Il faut tout d'abord rappeler que $V \times W$ est un espace vectoriel pour les lois "coordonnée par coordonnée" et que sa dimension vaut $\dim(V \times W) = \dim V + \dim W$. En effet, si $(v_1, v_2, ..., v_p)$ est une base de V et $(w_1, w_2, ..., w_q)$ une base de W, alors on vérifie aisément que la famille

$$\left(\begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_2 \\ 0 \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} v_p \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ w_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ w_2 \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} 0 \\ w_q \end{pmatrix}\right)$$

est une base de $V \times W$.)

Montrons que $\operatorname{Im} s \subset V+W$. Soit $y \in \operatorname{Im} s$. Soit $(v,w) \in V \times W$ tel que $y = s(u,v)$. On a alors $y = v + (-w) \in V+W$.

Montrons que $V+W \subset \operatorname{Im} s$. Soit $x \in V+W$. Soit $(v,w) \in V \times W$ tel que $x = v+w$. Alors $x = s(v,-w) \in \operatorname{Im} s$.

Montrons que $\operatorname{Ker} s \subset \{(i,i)\ ;\ i \in V \cap W\}$. Soit $(v,w) \in \operatorname{Ker} s$. Alors $s(v,w) = 0$, *i. e.* $v-w=0$, *i. e.* $v = w$; or ce dernier vecteur appartient d'une part à V (membre de gauche), d'autre part à W (membre de droite), donc est dans $V \cap W$, ce qui montre que (v,w) est bien de la forme (i,i) pour un certain $i \in V \cap W$ (prendre $i := v = w$).

Montrons que $\{(i,i)\ ;\ i \in V \cap W\} \subset \operatorname{Ker} s$. Soit $x \in \{(i,i)\ ;\ i \in V \cap W\}$. Soit $i \in V \cap W$ tel que $x = (i,i)$. Alors x appartient bien à l'ensemble $V \times W$ de définition de s et l'on $s(x) = s(i,i) = i - i = 0$, ce qui montre que $x \in \operatorname{Ker} s$.

Remarquons enfin que l'application $\left\{\begin{array}{ccc} \{(i,i)\ ;\ i \in V \cap W\} & \longrightarrow & V \cap W \\ (i,i) & \longmapsto & i \end{array}\right.$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels (car est linéaire, injective et surjective), d'où l'on déduit $\dim\{(i,i)\ ;\ i \in V \cap W\} = \dim(V \cap W)$.

La formule du rang appliquée à s donne alors

$$\dim(V+W) = \dim \operatorname{Im} s = \dim(V \times W) - \dim \operatorname{Ker} s = \dim V + \dim V - \dim V \cap W, \ c.\ q.\ f.\ d..$$

9. Montrons que $f_{|S}$ est injective. Soit $s \in \operatorname{Ker}\left(f_{|S}\right)$. Alors $f(s) = 0$, donc $s \in \operatorname{Ker} f$; or $s \in S$ (ensemble de départ de $f_{|S}$), donc $s \in S \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$, d'où $s = 0$.

Montrons que $\operatorname{Im}\left(f_{|S}\right) = \operatorname{Im} f$. L'inclusion $\operatorname{Im}\left(f_{|S}\right) \subset \operatorname{Im} f$ est claire. Soit réciproquement $y \in \operatorname{Im} f$. Soit $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Soit $(s,k) \in S \times \operatorname{Ker} f$ tel que $x = s+k$. On a alors

$$y = f(x) = f(s+k) = f(s) + f(k) = f_{|S}(s) + 0 \in \operatorname{Im}\left(f_{|S}\right),$$

ce qui montre l'inclusion $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} f_{|S}$.

Puisque S et $\operatorname{Im} f$ sont isomorphes (*via* f), ils ont même dimension, ce qui s'écrit

$$\dim \operatorname{Im} f = \dim S = \dim E - \dim \operatorname{Ker} f, \ c.\ q.\ f.\ d..$$

10. Soit E un e. v. de dimension finie notée n. Soit H un s.-e. v. de E de dimension $n-1$. Soit D un supplémentaire de H. Puisque $\dim D = n - \dim H = 1$, le s.-e. v. D est une droite. Soit a un vecteur

directeur de D. Soit $(h_1, h_2, ..., h_{n-1})$ une base de H. Alors la famille $(h_1, h_2, ..., h_{n-1}, a)$ est une base de E. Notons φ la forme linéaire coordonnée selon a dans cette base. Montrons que $H = \operatorname{Ker} \varphi$.

Soit $x \in E$. Soit $(\alpha, h) \in \mathbf{K} \times H$ tel que $x = \alpha a + h$. On a alors les implications

$$\varphi(x) = 0 \Longrightarrow \alpha = 0 \Longrightarrow x = h \Longrightarrow x \in H \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x \in H \\ x = 0a + \underbrace{x}_{\in H} \end{array} \right. \Longrightarrow \varphi(x) = 0,$$

d'où les équivalences $x \in \operatorname{Ker} \varphi \Longleftrightarrow \varphi(x) = 0 \Longleftrightarrow x \in H$, *c. q. f. d.*