Dimension finie

(T. G. 18)

1. *Déterminer les relations de liaison de la famille* $\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\1\\-4\end{pmatrix}\right)$ *de* $\mathbf{K}^3$.
2. *Déterminer des bases du noyau et de l'image de* $\left\{\begin{array}{ccc}\mathbf{K}^3 & \longrightarrow & \mathbf{K}^3\\ \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix}b+c\\a+b+c\\a\end{pmatrix}\end{array}\right.$ *. Sanity check ?*
3. *Déterminer une base du s.-e. v.* $\left\{(a,b,c,d)\in\mathbf{K}^4\ ;\ \left\{\begin{array}{c}a+b-c+d=0\\a-3b-2c=0\end{array}\right.\right\}$ *de* $\mathbf{K}^4$ *et en donner un supplémentaire. Sanity check ?*
4. *Posons* $V := \operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}\right\}$ *et* $W := \left\{(p,q,r,s)\in\mathbf{K}^4\ ;\ p+q-r+2s=0\right\}$.
   Trouver une équation linéaire de V*, une base de* W *puis une base de* $V\cap W$*. Sanity check ?*
5. *Soit* $(u,v)\in\mathbf{K}^2$*. Déterminer le rang de la famille* $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\u\\3v\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\u\end{pmatrix}\right)$ *en fonction de* (u,v).
6. *Soient* I *un intervalle infini de* $\mathbf{R}$, $k\in\mathbf{N}$ *et* $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_k$ *des scalaires distincts. Montrer la liberté des familles :*
   (a) $(t\mapsto|t-\lambda_i|)$ *dans* $\mathbf{K}^I$;
   (b) $\left(t\mapsto e^{\lambda_i t}\right)$ *dans* $\mathbf{K}^I$;
   (c) $\left(t\mapsto t^{\lambda_i}\right)$ *dans* $\mathbf{K}^I$;
   (d) (λ_i^n) *dans* $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$.
   (e) $\left(n^{\lambda_i}\right)$ *dans* $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$
7. *Soient* E *un ev de dimension finie notée* n *et* (b_i) *une base de* E*. Montrer que, pour tout* $i\in\{1,2,...,n\}$,
   l'application $\left\{\begin{array}{ccc}E & \longrightarrow & \mathbf{K}\\ x & \longmapsto & \left\{\begin{array}{l}\text{la } i\text{-ième coordonnée}\\ \text{de } x \text{ dans la base } (b_k)\end{array}\right.\end{array}\right.$ *est une forme linéaire sur* E.
8. *Soient* E *un e. v. et* V *et* W *deux s.-e. v. de* E *de dimensions finies.*
   (a) *On considère une base* $(i_1,...,i_r)$ *de* $V\cap W$ *que l'on complète d'une part en une base* $(i_1,i_2,...,i_r,v_1,v_2,...,v_p)$ *de* V*, d'autre part en une base* $(i_1,i_2,...,i_r,w_1,w_2,...,w_q)$ *de* W*. Montrer que la famille*
   $$(v_1,v_2,...,v_p,w_1,w_2,...,w_q,i_1,i_2,...,i_r)$$
   est une base de $V+W$*. En déduire la formule de Grassmann.*
   (b) *On définit* $s:\left\{\begin{array}{ccc}V\times W & \longrightarrow & E\\ (v,w) & \longmapsto & v-w\end{array}\right.$ *. Montrer que* $\operatorname{Im}s=V+W$ *et que* $\operatorname{Ker}s=\{(i,i)\ ;\ i\in V\cap W\}$.
   En déduire la formule de Grassmann.
9. *Soient* E *un e. v. de dimension finie,* F *un e. v. et* $f\in L(E,F)$*. On considère un supplémentaire* S *de* $\operatorname{Ker}f$ *dans* E*. Montrer que* $f_{|S}$ *est un isomorphisme de* S *sur* $\operatorname{Im}f$*. En déduire la formule du rang.*
10. *Montrer que tout hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non nulle.* (hint : considérer une droite supplémentaire et une forme linéaire coordonnée)