Variations

(T. G. 17)

1. La fonction nulle est continue (car constante), donc appartient à $C^0(I,\mathbf{K})$.

Soient $(f,g)\in C^0(I,\mathbf{K})^2$ et $\lambda\in\mathbf{K}$. L'appartenance $\lambda f+g\in C^0(I,\mathbf{K})$ équivaut à la continuité de $\lambda f+g$ en tout point de I. Soit donc $a\in I$. Puisque f et g sont continues en a, on a les tendances $\left\{\begin{array}{l} f\xrightarrow{a} f(a) \\ g\xrightarrow{a} g(a)\end{array}\right.$, d'où l'on tire $\lambda f+g\xrightarrow{a}\lambda f(a)+g(a)=[\lambda f+g](a)$, *c. q. f. d.*.

2. Notons f la fonction étudiée.

Soit $x\in\mathbf{R}$. Le réel $\frac{x\ln x}{x-1}$ fait sens ssi le logarithme $\ln x$ fait sens et si le dénominateur $x-1$ est non nul, *i. e.* ssi $x>0$ et $x\neq 1$. Par conséquent, f est définie exactement sur $]0,1[\cup]1,\infty[$.

Soit $t>0$ autre que 1. Lorsque $t\longrightarrow\infty$, on a les tendances $f(t)=\underbrace{\frac{1}{1-\frac{1}{t}}}_{\longrightarrow 1}\underbrace{\ln t}_{\longrightarrow\infty}\longrightarrow\infty$; lorsque $t\longrightarrow 0$, on a les tendances $f(t)=\underbrace{\frac{1}{t-1}}_{\text{borné car }\longrightarrow -1}\underbrace{t\ln t}_{\longrightarrow 0}\longrightarrow 0$.

Étudions f au voisinage de 1. Soit $x>-1$ non nul : on a

$$\begin{array}{rcl} f(1+x) & = & \dfrac{(1+x)\ln(1+x)}{(1+x)-1} \\ & = & (1+x)\dfrac{\ln(1+x)-\ln 1}{(1+x)-1} \\ & \overset{x\to 0}{\longrightarrow} & (1+0)\ln'(1) \\ & = & 1, \end{array}$$

ce qui montre que f est prolongeable par continuité en 1 en posant $f(1):=1$. (**Remarque** : la connaissance du développement limité de ln en 1 permettrait de montrer que f est dérivable en 1.)

La fonction f est C^∞ là où elle est définie (comme quotient de produits de fonction C^∞). Soit $t>0$ autre que 1 : on a

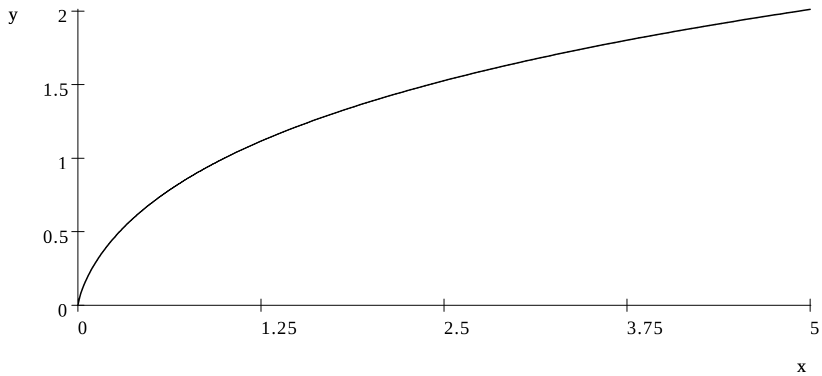
$$\begin{array}{rcl} f'(t) & = & \dfrac{\partial}{\partial t}\dfrac{t\ln t}{t-1} \\ & = & \dfrac{\left(\frac{\partial}{\partial t}t\ln t\right)(t-1)-t\ln t\frac{\partial}{\partial t}(t-1)}{(t-1)^2} \\ & = & \dfrac{\left(\ln t+t\frac{1}{t}\right)(t-1)-t\ln t}{(t-1)^2} \\ & = & \dfrac{t-1-\ln t}{(t-1)^2} \\ & \geq & 0 \quad \begin{array}{c}\text{car la tangente à } \ln \text{ en 1 est} \\ \text{au-dessus du graphe de } \ln,\end{array} \end{array}$$

ce qui montre que f croît sur chacun des intervalles où elle est définie.

On peut à présent tracer le tableau de variations de f :

t	0		1		∞
$f(t)$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	∞

. Le graphe de f ressemblerait à



(un peu plus de travail nous aurait permis de montrer la concavité de f, ce qui se traduit par la décroissance de f').

3. Soit $x \in \mathbf{R}$. Le réel $\ln\cos\left(\pi + \frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$ fait sens ssi l'argument $\cos\left(\pi + \frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$ est strictement positif ; or on a les appartenances et l'inclusion $\frac{x^2-1}{x^2+1} = 1 - \underbrace{\frac{2}{x^2+1}}_{\in[0,2]} \in [-1,1] \subset \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, d'où $\pi + \frac{x^2-1}{x^2+1} \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, ce qui montre que l'argument du logarithme est toujours négatif. La fonction donnée n'est donc définie nulle part : ce serait un non-sens d'étudier ses variations.

4. Notons f la fonction considérée. On a alors $f = \frac{\exp}{\exp - 1} = 1 + \frac{1}{\exp - 1} = \underbrace{[\mathrm{Id}+1]}_{\text{croît}} \circ \underbrace{\frac{1}{\mathrm{Id}}}_{\text{décroît}} \circ \underbrace{[\mathrm{Id}-1]}_{\text{croît}} \circ \underbrace{\exp}_{\text{croît}}$ (les variations indiquées sont toutes *strictes*), ce qui montre que f décroît strictement sur chacun des intervalles où elle est définie, en particulier sur $\mathbf{R}_+^*$ (en effet, le réel $e^t - 1$ est strictement positif, donc non nul, pour tout réel $t > 0$). Puisque f est continue, f réalise une bijection de $\mathbf{R}_+^*$ sur $f\left(\mathbf{R}_+^*\right)$. Puisque f décroît, l'image de $]0,\infty[$ vaut $]\lim_\infty f, \lim_{0^+} f[$. Or l'égalité $f = 1 + \frac{1}{\exp - 1}$ montre que $f \xrightarrow{\infty} 1$ et que $f \xrightarrow{0^+} \infty$. Finalement, f réalise une bijection de $\mathbf{R}_+^*$ sur $]1,\infty[$

Soient $x > 0$ et $y > 1$ deux réels. On a les équivalences

$$\begin{aligned} f(x) = y \quad &\iff \quad 1 + \frac{1}{e^x - 1} = y \iff \frac{1}{e^x - 1} = y - 1 \underset{\text{car } y \neq 1}{\overset{\text{possible}}{\iff}} e^x - 1 = \frac{1}{y-1} \iff e^x = 1 + \frac{1}{y-1} \\ &\iff \quad x = \ln\left(1 + \frac{1}{y-1}\right) \iff x = \ln\left(\frac{y}{y-1}\right) \iff x = -\ln\left(1 - \frac{1}{y}\right) \end{aligned}$$

(les trois dernières écritures de x conviennent toutes).

La réciproque de $f_{|\mathbf{R}_+^*}$ est donc $\left\{ \begin{array}{ccc}]1,\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R}_+^* \\ t & \longmapsto & \ln\left(1 + \frac{1}{t-1}\right) = -\ln\left(1 - \frac{1}{t}\right) \end{array} \right.$.

5. La fonction $\frac{1}{\sin}$ est continue et bien définie sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et y décroît strictement, donc réalise une bijection de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\left]\lim_{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin}, \lim_{0^+} \frac{1}{\sin}\right[=]1,\infty[$. Soient $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et $y > 1$. On a les équivalences

$$\frac{1}{\sin x} = y \underset{\text{car } y \neq 0}{\overset{\text{possible}}{\iff}} \sin x = \frac{1}{y} \overset{\text{car } |x| < \frac{\pi}{2}}{\iff} x = \arcsin\frac{1}{y},$$

ce qui montre que la réciproque de $\frac{1}{\sin}_{|\left]0,\frac{\pi}{2}\right[}$ est $\left\{ \begin{array}{ccc}]1,\infty[& \longrightarrow & \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\\ t & \longmapsto & \arcsin\frac{1}{t} \end{array} \right.$.

De la même façon, $\frac{1}{\sin}$ est bien définie, continue et strictement croissante sur $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, donc réalise une bijection de $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ sur $\left]\lim_{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin}, \lim_{\pi^-} \frac{1}{\sin}\right[=]1,\infty[$. Soient ensuite $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ et $y > 1$. On a les équivalences

$$\frac{1}{\sin x} = y \underset{\text{car } y \neq 0}{\overset{\text{possible}}{\iff}} \sin x = \frac{1}{y} \iff \sin(\pi - x) = \frac{1}{y} \overset{\text{car } |\pi - x| < \frac{\pi}{2}}{\iff} \pi - x = \arcsin\frac{1}{y} \iff x = \pi - \arcsin\frac{1}{y},$$

ce qui montre que la réciproque de $\frac{1}{\sin}_{|\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[}$ est $\left\{ \begin{array}{ccc}]1,\infty[& \longrightarrow & \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[\\ t & \longmapsto & \pi - \arcsin\frac{1}{t} \end{array} \right.$.

6. On a les égalités $2^9 + 2^5 = 2 \cdot 2^8 + 2 \cdot 2^4 = 2\left(\left(2^2\right)^2\right)^2 + 2\left(2^2\right)^2 = 512 + 32 = 544$. Or la fonction $\mathrm{Id}^{18} + \mathrm{Id}^{10}$ croît strictement sur $\mathbf{R}_+$ (comme somme de fonctions strictement croissantes), donc ne peut atteindre qu'au plus fois la valeur 544. L'équation proposée admet donc une unique solution positive, à savoir $\sqrt{2}$. Pour des raisons identiques, la fonction $\mathrm{Id}^{18} + \mathrm{Id}^{10}$ décroissante sur $\mathbf{R}_-$ y est injective, d'où une unique solution négative : $-\sqrt{2}$. Finalement, l'ensemble des solutions est $\left\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right\}$.

7. Notons d la fonction qui à un réel $t \in [0,1]$ associe le nombre de kilomètres mesurant la distance parcourue par le marcheur au bout de t heures. On a en particulier $d(0) = 0$ et $d(1) = 12$. On supposera que le marcheur ne fait pas de bonds quantiques et, par conséquent, que la fonction d est continue. La fonction $z : t \mapsto d\left(t + \frac{1}{2}\right) - d(t) - 6$ est alors continue et vérifie

$$z(0)\, z\left(\frac{1}{2}\right) = \left(d\left(0 + \frac{1}{2}\right) - d(0) - 6\right)\left(d\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) - d\left(\frac{1}{2}\right) - 6\right) = -\left(d\left(\frac{1}{2}\right) - 6\right)^2 \leq 0,$$

ce qui montre (par le théorème des valeurs intermédiaires) que z s'annule sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, mettons en un réel δ. On a alors $d\left(\delta + \frac{1}{2}\right) = d(\delta) + 6$, ce qui montre que le marcheur a parcouru exactement six kilomètres pendant la demi-heure commençant à δ heures.

8. Montrons déjà que $f(0) = 0$. Remarquer que f est continue en 0 puisqu'elle y est dérivable. On a par ailleurs pour tout $n \in \mathbf{N}$ l'égalité $f\left(\frac{18}{2^n}\right) = \frac{f(18)}{2^n}$ (par une récurrence immédiate) : la membre de gauche tend vers $f(0)$ (car f est continue en 0) et celui de droite tend vers 0, d'où (par unicité de la limite) l'égalité annoncée.

Notons $\lambda := f'(0)$. Il s'agit de montrer que $f = \lambda\,\mathrm{Id}$. Soit $x \in \mathbf{R}$. On a pour tout $n \in \mathbf{N}$ les égalités et la tendance

$$f(x) = 2^n f\left(\frac{x}{2^n}\right) = x\frac{f\left(\frac{x}{2^n}\right) - f(0)}{\underbrace{\frac{x}{2^n}}_{\frac{x}{2^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0} - 0} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} xf'(0) = \lambda x, \text{ c. q. f. d. (par unicité de la limite).}$$

9. Il suffit de montrer $\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2,\ f(x) = f(y)$. Soient x et y deux réels. Alors les deux suites $(x + 42n)$ et $(y + 42n)$ tendent toutes deux vers ∞, donc les suites $(f(x + 42n))$ et $(f(y + 42n))$ tendent vers $\lim_\infty f$. Par ailleurs, la 42-périodicité de f montre l'égalité séquentielle $(f(x + 42n)) = (f(x))$, de sorte que la suite constante $(f(x + 42n))$ tend vers $f(x)$. En procédant de même pour y et en utilisant l'unicité de la limite, on montrerait que $f(y) = \lim_\infty f = f(x)$, *c. q. f. d.*.

10. Notons $\varphi := \exp \times (f - f')$ la fonction suggérée par l'énoncé. Alors φ est de classe C^1 comme produit de fonctions C^1 et prend la même valeur en 0 et 1 puisque f et f' y coïncident, donc le théorème de Rolle nous donne un $t \in \,]0,1[$ où φ' s'annule. Cela s'écrit

$$0 = \varphi'(t) = \frac{\partial}{\partial t}\left[e^t\left(f(t) - f'(t)\right)\right] = e^t\left[\left(f(t) - f'(t)\right) + \left(f'(t) - f''(t)\right)\right] = e^t\left[f(t) - f''(t)\right],$$

d'où l'égalité $f(t) = f''(t)$, *c. q. f. d.*.

11. On renvoie au cours : la fonction $e^{-\lambda\,\mathrm{Id}} f$ s'annule 18 fois, donc sa dérivée $e^{-\lambda\,\mathrm{Id}}(f' - \lambda f)$ s'annule (par le théorème de Rolle) $18 - 1$ fois, *i. e.* (puisque $e^{-\lambda\,\mathrm{Id}}$ ne s'annule jamais) $f' - \lambda f$ s'annule 17 fois.