Variations

(T. G. 17)

1. M*ontrer que* $C^0(I,\mathbf{K})$ *est un sev de* $\mathbf{K}^I$ *stable par produit.*
2. *Étudier la fonction* $x \mapsto \frac{x \ln x}{x-1}$.
3. *Donner les variations de la fonction* $x \mapsto \ln\cos\left(\pi + \frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$
4. *Montrer que la fonction* $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \frac{e^x}{e^x-1} \end{array}\right.$ *réalise une bijection de* $\mathbf{R}_+^*$ *sur un intervalle que l'on précisera. Expliciter sa réciproque.*
5. *Montrer que la fonction* $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \frac{1}{\sin t} \end{array}\right.$ *réalise une bijection de* $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ *sur un intervalle que l'on précisera. Expliciter sa réciproque. Même question en remplaçant* $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ *par* $\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$.
6. *Calculer* 2^9+2^5 *et résoudre l'équation* $b^{18}+b^{10}=544$ *d'inconnue réelle* b.
7. *Un marcheur parcourt douze kilomètres en une heure. Montrer qu'il y a un intervalle d'une demi-heure pendant lequel il parcourt exactement six kilomètres.* (hint : introduire une fonction $z : t \mapsto d\left(t+\frac{1}{2}\right)-d(t)-6$ où d est la distance parcourue et montrer que z s'annule).
8. *Soit* $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ *continue en* 0 *telle que* $\forall x \in \mathbf{R},\ f(2x) = 2f(x)$. *Montrer que* f *est constante.* (hint : utiliser des suites $\left(\frac{x}{2^n}\right)$)
9. *Soit* $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ *continue* 42*-périodique. On suppose que* f *admet une limite en* ∞. *Montrer que* f *est constante.* (hint : considérer des suites $(x+42n)$)
10. *Soit* $f : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ *de classe* C^2 *telle que* f *et* f' *coïncident en* 0 *et en* 1. *Montrer que* f *et* f'' *coïncident en un point.* (hint : introduire la fonction $t \mapsto e^t\left(f(t) - f'(t)\right)$)
11. *Soit* $f : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ *s'annulant* 18 *fois. Montrer que, pour tout scalaire* λ, *la fonction* $f' - \lambda f$ *s'annule* 17 *fois.* (hint : utiliser un facteur intégrant)