Applications linéaires

(T. G. 16)

1. Notons f l'application considérée. On a $\begin{cases} f(2(1,0)) = f(2,0) = 4 \\ 2f(1,0) = 2 \cdot 1 = 2 \neq 4 \end{cases}$, donc f n'est pas linéaire.

2. D'une part Re est une application linéaire du $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathbf{C}$ dans lui-même, d'autre part la définition de Re : $\underbrace{a}_{\in\mathbf{R}} + i\underbrace{b}_{\in\mathbf{R}} \mapsto a$ et la décomposition $\mathbf{C} = \mathbf{R} \oplus i\mathbf{R}$ montrent que Re est la projection sur $\mathbf{R}$ parallèlement à $i\mathbf{R}$. On en déduite que Re est un projecteur d'image $\mathbf{R}$ et de noyau $i\mathbf{R}$.

   Sanity check : d'une part le noyau de Re est l'ensemble des complexes de partie réelle nulle, ce qui s'écrit $\operatorname{Ker}\operatorname{Re} = i\mathbf{R}$, d'autre part une partie réelle est toujours réelle, ce qui s'écrit $\operatorname{Im}\operatorname{Re} \subset \mathbf{R}$.

   ★ On prendra garder à ne pas confondre la partie imaginaire $\operatorname{Im} z$ d'un complexe avec l'image $\operatorname{Im} f$ d'une fonction f.

3. Le cours nous dit que les homothéties sont des endomorphismes. Soit réciproquement $f \in L(\mathbf{K})$. Soit $a \in \mathbf{K}$. Puisque a est à la fois un vecteur et un scalaire, on peut écrire

$$f(a) = f(a \times 1) = f(a \cdot 1) = a \cdot f(1) = a \times f(1) = f(1)\, a,$$

   ce qui montre que f est l'homothétie de rapport $f(1)$. Les automorphismes de $\mathbf{K}$ sont donc les homothéties bijectives. Or une homothétie de rapport non nul est inversible (de réciproque l'homothétie de rapport inverse) et l'homothétie de rapport nul n'est pas bijective puisque le vecteur 1 n'est pas atteint par une telle homothétie nulle. On en déduit que $GL(\mathbf{K}) = \{\lambda \operatorname{Id}\ ;\ \lambda \in \mathbf{K}^*\}$ est formé des homothéties de rapport non nul.

4. Notons f l'application considérée. Soient (a_n) et (b_n) deux suites et λ un scalaire. On a d'une part les égalités

$$\begin{aligned} f(\lambda(a_n) + (b_n)) &= f((\lambda a_n + b_n)) = ((\lambda a_{n+1} + b_{n+1}) - 9(\lambda a_n + b_n)) = (\lambda(a_{n+1} - 9a_n) + (b_{n+1} - 9b_n)) \\ &= \lambda f((a_n)) + f((b_n)), \text{ ce qui montre que } f \text{ est linéaire,} \end{aligned}$$

   d'autre part les équivalences

$$\begin{aligned} (a_n) \in \operatorname{Ker} f &\iff f((a_n)) = (0) \iff (a_{n+1} - 9a_n) = (0) \iff \forall n \in \mathbf{N},\ a_{n+1} - 9a_n = 0 \\ &\iff \forall n \in \mathbf{N},\ a_{n+1} = 9a_n \iff (a_n) \text{ est géométrique de raison } 9, \end{aligned}$$

   ce qui montre que le noyau de f est la droite vectorielle formée des suites géométriques de raison 9.

5. Notons φ l'application considérée. Une fonction C^∞ étant intégrable et deux fois dérivable, φ est bien définie. Puisque φ arrive dans $\mathbf{K}$, il suffit d'établir sa linéarité pour montrer qu'elle est une forme linéaire. Soient f et g deux fonctions dans $C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{K})$ et λ un scalaire. On a

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda f + g) &= 3[\lambda f + g]''(18) - 5\int_0^7 (\lambda f + g) \\ &= 3[\lambda f'' + g''](18) - 5\left(\lambda \int_0^7 f + \int_0^7 g\right) \\ &= 3\lambda f''(18) + g''(18) - 5\lambda \int_0^7 f - 5\int_0^7 g \\ &= \lambda\left(3f''(18) - 5\int_0^7 f\right) + \left(g''(18) - 5\int_0^7 g\right) \\ &= \lambda\varphi(f) + \varphi(g),\ c.\ q.\ f.\ d.. \end{aligned}$$

6. Notons Φ l'application considérée. Soient f et g deux suites et λ un scalaire. On a d'une part les égalités

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda f + g) &= (\lambda f + g)' + 2(\lambda f + g) = \lambda f' + g' + 2\lambda f + 2g = \lambda(f' + 2f) + (g' + 2g) \\ &= \lambda\Phi(f) + \Phi(g), \text{ ce qui montre que } f \text{ est linéaire,} \end{aligned}$$

d'autre part les équivalences

$$\begin{aligned}
f \in \operatorname{Ker} \Phi & \Longleftrightarrow \Phi(f)=0 \\
& \Longleftrightarrow f'+2f=0 \\
& \Longleftrightarrow \forall x \in \mathbf{R},\ f'(x)+2f(x)=0 \\
& \Longleftrightarrow \forall x \in \mathbf{R},\ e^{2x} f'(x)+e^{2x} f(x)=0 \\
& \Longleftrightarrow \forall x \in \mathbf{R},\ \frac{d}{dx}\left(e^{2x} f(x)\right)=0 \\
& \Longleftrightarrow x \mapsto e^{2x} f \text{ est constante} \\
& \Longleftrightarrow \exists C \in \mathbf{K},\ \forall x \in \mathbf{R},\ e^{2x} f(x)=C \\
& \Longleftrightarrow \exists C \in \mathbf{K},\ \forall x \in \mathbf{R},\ f(x)=Ce^{-2x} \\
& \Longleftrightarrow \exists C \in \mathbf{K},\ f=Ce^{-2\,\mathrm{Id}},
\end{aligned}$$

ce qui montre que le noyau de f est la droite vectorielle $\mathbf{K}e^{-2\,\mathrm{Id}}$ engendrée par $t \mapsto e^{-2t}$.

7. Notons f l'application considérée. Il s'agit de montrer que f est bien définie (ce qui est clair), linéaire et bijective.

Montrons que f est linéaire. Soient (a,b,c) et (u,v,w) deux vecteurs de $\mathbf{K}^3$ et λ un scalaire. On a les égalités

$$\begin{aligned}
f\left(\lambda\begin{pmatrix} a \\ b \\ c\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} u \\ v \\ w\end{pmatrix}\right) & = f\begin{pmatrix}\lambda a+u \\ \lambda b+v \\ \lambda c+w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2(\lambda b+v)+(\lambda c+w) \\ (\lambda a+u)+(\lambda c+w) \\ (\lambda b+v)+(\lambda c+w)-(\lambda a+u)\end{pmatrix} \\
& = \begin{pmatrix}\lambda(2b+c)+(2v+u) \\ \lambda(a+c)+(u+w) \\ \lambda(b+c-a)+(v+w-u)\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} 2b+c \\ a+c \\ b+c-a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2v+u \\ u+w \\ v+w-u\end{pmatrix} \\
& = \lambda f\begin{pmatrix} a \\ b \\ c\end{pmatrix}+f\begin{pmatrix} u \\ v \\ w\end{pmatrix},\ c.\ q.\ f.\ d..
\end{aligned}$$

Montrons que f est bijective. Soient (a,b,c) et (x,y,z) deux vecteurs de $\mathbf{K}^3$. Montrons que l'équation $f(x,y,z)=(a,b,c)$ d'inconnue (x,y,z) admet une unique solution. On a les équivalences

$$f(x,y,z)=(a,b,c) \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2y+z \\ x+z \\ y+z-x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c\end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2y+z=a \\ x+z=b \\ y+z-x=c\end{cases} \underset{L_3 \longleftarrow L_3-L_2}{\overset{L_1 \longleftarrow L_1-L_2}{\Longleftrightarrow}} \begin{cases} 2y-x=a-b \\ x+z=b \\ y-2x=c-b\end{cases}$$

$$\overset{L_2 \longleftrightarrow L_3}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} 2y-x=a-b \\ y-2x=c-b \\ x+z=b\end{cases} \overset{L_1 \longleftarrow L_1-2L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} 3x=a+b-2c \\ y=c-b+2x \\ z=b-x\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=\frac{a+b-2c}{3} \\ y=\frac{2a-b-c}{3} \\ z=\frac{2b-a+2c}{3}\end{cases},\text{ ce qui conclut.}$$

8. Notons f et g resp. les applications considérées. Elles sont clairement bien définies, donc il suffit d'établir leur linéarité pour montrer que ce sont des endomorphismes de $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$. Soient (a_n) et (b_n) deux suites et λ un scalaire. On a

$$\begin{aligned}
f(\lambda(a_n)+(b_n)) & = f((\lambda a_n+b_n))=(18^n(\lambda a_n+b_n))=(\lambda 18^n a_n+18^n b_n)=\lambda(18^n a_n)+18^n b_n \\
& = \lambda f((a_n))+f((b_n)) \text{ et} \\
g(\lambda(a_n)+(b_n)) & = g((\lambda a_n+b_n))=(42^n(\lambda a_{n+7}+b_{n+7}))=(\lambda 42^n a_{n+7}+42^n b_{n+7})=\lambda(42^n a_{n+7})+(42^n b_{n+7}) \\
& = \lambda g((a_n))+g((b_n)),\text{ d'où la linéarité voulue.}
\end{aligned}$$

Montrons que f est bijective (ce qui montrera que f est un automorphisme de $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$). Soient (x_n) et (a_n) deux suites. Montrons que l'équation $f((x_n))=(a_n)$ d'inconnue (x_n) admet une unique solution. On a les équivalences

$$\begin{aligned}
f((x_n))=(a_n) & \Longleftrightarrow (18^n x_n)=(a_n) \Longleftrightarrow \forall n \in \mathbf{N},\ 18^n x_n=a_n \Longleftrightarrow \forall n \in \mathbf{N},\ x_n=\frac{a_n}{18^n} \\
& \Longleftrightarrow (x_n)=\left(\frac{a_n}{18^n}\right),\text{ ce qui conclut.}
\end{aligned}$$

Puisque f est injective, son noyau est nul.

Montrons que g n'est pas injective (ce qui montrera que g n'est pas un automorphisme de $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$). Étudions $\operatorname{Ker} g$. Soit $(a_n) \in \mathbf{K}^{\mathbf{N}}$. On a les équivalences

$$\begin{aligned}(a_n) \in \operatorname{Ker} g &\iff g((a_n)) = (0) \iff (42^n a_{n+7}) = (0) \iff \forall n \in \mathbf{N},\ 42^n a_{n+7} = 0 \iff \forall n \in \mathbf{N},\ a_{n+7} = 0 \\ &\iff \forall m \in \mathbf{N},\ m \geq 7 \Longrightarrow a_m = 0.\end{aligned}$$

Ainsi, $\operatorname{Ker} g$ est formé des suites dont tous les termes sont nuls à l'exception possible des sept premiers (par exemple la suite $(1,0,0,0,...)$), ce qui montre que $\operatorname{Ker} g$ n'est pas nul et donc que g n'est pas injective.

9. L'application $s : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbf{K}^{\mathbf{K}} & \longrightarrow & \mathbf{K}^{\mathbf{K}} \\ f & \longmapsto & f \circ (-\operatorname{Id}) \end{array}\right.$ est linéaire (composition à droite par une application donnée). Elle vérifie de plus $s^2 = \operatorname{Id}_{\mathbf{K}^{\mathbf{K}}}$ puisqu'on a pour tout $f \in \mathbf{K}^{\mathbf{K}}$

$$s^2(f) = s(s(f)) = s(f \circ (-\operatorname{Id})) = (f \circ (-\operatorname{Id})) \circ (-\operatorname{Id}) = f \circ \underbrace{(-\operatorname{Id}) \circ (-\operatorname{Id})}_{=\operatorname{Id}} = f \circ \operatorname{Id} = f = \operatorname*{Id}_{\mathbf{K}^{\mathbf{K}}}(f).$$

On en déduit que les espaces $\operatorname{Ker}(s - \operatorname{Id}_{\mathbf{K}^{\mathbf{K}}})$ et $\operatorname{Ker}(s + \operatorname{Id}_{\mathbf{K}^{\mathbf{K}}})$ sont supplémentaires.

Montrons que ces derniers sont constitués des fonctions resp. paires et impaires. Soit $f \in \mathbf{K}^{\mathbf{K}}$: on a d'une part les équivalences

$$\begin{aligned} f \in \operatorname{Ker}\left(s - \operatorname*{Id}_{\mathbf{K}^{\mathbf{K}}}\right) &\iff s(f) = f \\ &\iff \forall x \in \mathbf{K},\ [s(f)](x) = f(x) \\ &\iff \forall x \in \mathbf{K},\ [f \circ (-\operatorname{Id})](x) = f(x) \\ &\iff \forall x \in \mathbf{K},\ f(-\operatorname{Id}(x)) = f(x) \\ &\iff \forall x \in \mathbf{K},\ f(-x) = f(x) \\ &\iff f \text{ est paire,} \end{aligned}$$

d'autre part les équivalences

$$\begin{aligned} f \in \operatorname{Ker}\left(s + \operatorname*{Id}_{\mathbf{K}^{\mathbf{K}}}\right) &\iff s(f) = -f \\ &\iff \forall x \in \mathbf{K},\ [s(f)](x) = -f(x) \\ &\iff \forall x \in \mathbf{K},\ f(-x) = -f(x) \\ &\iff f \text{ est impaire.} \end{aligned}$$

10. Notons t et s les applications resp. considérées.

Montrons que s et t sont linéaires. Soient (a,b) et (u,v) deux vecteurs de $\mathbf{K}^2$ et λ un scalaire. On a d'une part les égalités

$$\begin{aligned} s\left(\lambda\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\right) &= s\begin{pmatrix}\lambda a + u\\ \lambda b + v\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}(\lambda a + u) + (\lambda b + v)\\ (\lambda a + u) - (\lambda b + v)\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\lambda(a+b) + (b+v)\\ \lambda(a-b) + (b-v)\end{pmatrix} \\ &= \lambda\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}a+b\\a-b\end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}b+v\\b-v\end{pmatrix} = \lambda s\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}, \text{ d'autre part les égalités} \\ t\left(\lambda\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\right) &= t\begin{pmatrix}\lambda a + u\\ \lambda b + v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda b + v\\ \lambda a + u\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}b\\a\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}v\\u\end{pmatrix} = \lambda t\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}, \textit{ c. q. f. d.}. \end{aligned}$$

Montrons que les carrés de s et t valent l'identité de $\mathbf{K}^2$. Soit $(a,b) \in \mathbf{K}^2$. On a d'une part

$$\begin{aligned} s^2\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} &= s\left(s\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\right) = s\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}a+b\\a-b\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}s\begin{pmatrix}a+b\\a-b\end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}(a+b)+(a-b)\\(a+b)-(a-b)\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2a\\2b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}, \\ \text{d'autre part } t^2\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} &= t\left(t\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\right) = t\begin{pmatrix}b\\a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}, \textit{ c. q. f. d.}. \end{aligned}$$

Décrivons $\mathrm{Ker}\,(t \pm \mathrm{Id})$. Soit $(a,b) \in \mathbf{K}^2$. On a les équivalences

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\,(t - \mathrm{Id}) \quad & \iff \quad t\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{c} b = a \\ a = b \end{array} \right. \\
& \iff \quad a = b \iff \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
& \iff \quad \exists \lambda \in \mathbf{K},\ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbf{K}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

d'où l'égalité $\mathrm{Ker}\,(t - \mathrm{Id}) = \mathbf{K}\binom{1}{1}$. On mènerait de même les équivalences

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\,(t + \mathrm{Id}) \iff \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \iff b = -a \iff \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbf{K}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

d'où l'égalité $\mathrm{Ker}\,(t - \mathrm{Id}) = \mathbf{K}\binom{1}{-1}$.

Décrivons $\mathrm{Ker}\,(s \pm \mathrm{Id})$. Soit $(a,b) \in \mathbf{K}^2$. On a les équivalences

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{Id}) \quad & \iff \quad s\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \iff \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} a+b \\ a-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{c} a + b = \sqrt{2}a \\ a - b = \sqrt{2}b \end{array} \right. \\
& \iff \quad \left\{ \begin{array}{c} b = \left(\sqrt{2}-1\right) a \\ a = \left(\sqrt{2}+1\right) b \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} b = \left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right) b \\ a = \left(\sqrt{2}+1\right) b \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} b = \left(\sqrt{2}^2 - 1^2\right) b \\ a = \left(\sqrt{2}+1\right) b \end{array} \right. \\
& \iff \quad a = \left(\sqrt{2}+1\right) b \iff \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\sqrt{2}+1\right) b \\ b \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} \sqrt{2}+1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
& \iff \quad \exists \lambda \in \mathbf{K},\ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} \sqrt{2}+1 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbf{K}\begin{pmatrix} \sqrt{2}+1 \\ 1 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

d'où l'égalité[1] $\mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{Id}) = \mathbf{K}\binom{\sqrt{2}+1}{1}$. On mènerait de même les équivalences

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{Id}) \quad & \iff \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} a+b \\ a-b \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{c} b = \left(-1-\sqrt{2}\right) a \\ a = \left(1-\sqrt{2}\right) b \end{array} \right. \iff a = \left(1-\sqrt{2}\right) b \\
& \iff \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(1-\sqrt{2}\right) b \\ b \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbf{K}\begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

d'où l'égalité $\mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{Id}) = \mathbf{K}\binom{1-\sqrt{2}}{1} = \mathbf{K}\binom{-1}{1+\sqrt{2}}$ (multiplier $\binom{1-\sqrt{2}}{1}$ par $1+\sqrt{2}$ pour obtenir la seconde égalité).

On déduit de tout ce qui précède les décompositions suivantes de $\mathbf{K}^2$:

$$\mathbf{K}^2 = \mathbf{K}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \oplus \mathbf{K}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{K}^2 = \mathbf{K}\begin{pmatrix} \sqrt{2}+1 \\ 1 \end{pmatrix} \oplus \mathbf{K}\begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

11. Notons p et q les applications resp. considérées.

Montrons que p et q sont linéaires. Soient (a,b,c) et (u,v,w) deux vecteurs de $\mathbf{K}^3$ et λ un scalaire.

[1] En choisissant ci-dessus de garder l'équation en b plutôt que celle en a, on aurait trouvé $\mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{Id}) = \mathbf{K}\binom{1}{\sqrt{2}-1}$; l'égalité des droites obtenue résulte par ailleurs de la colinéarité des vecteurs $\binom{\sqrt{2}-1}{1}$ et $\left(\sqrt{2}-1\right)\binom{\sqrt{2}+1}{1} = \binom{1}{\sqrt{2}-1}$.

On a d'une part les égalités

$$\begin{aligned}
p\left(\lambda\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}\right) &= p\begin{pmatrix}\lambda a+u\\ \lambda b+v\\ \lambda c+w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\(\lambda a+u)+(\lambda b+v)+(\lambda c+w)\\0\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}0\\ \lambda(a+b+c)+(u+v+w)\\0\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}0\\a+b+c\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\u+v+w\\0\end{pmatrix}\\
&= \lambda p\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}+p\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}, \text{ d'autre part les égalités}\\
q\left(\lambda\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}\right) &= q\begin{pmatrix}\lambda a+u\\ \lambda b+v\\ \lambda c+w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(\lambda a+u)+(\lambda b+v)\\0\\(\lambda c+w)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda(a+b)+(u+v)\\0\\ \lambda(c)+w\end{pmatrix}\\
&= \lambda\begin{pmatrix}a+b\\0\\c\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}u+v\\0\\w\end{pmatrix}=\lambda q\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}+q\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}, \textit{ c. q. f. d.}.
\end{aligned}$$

Montrons à présent que p et q valent chacun leur carré. Soit $(x,y,z)\in\mathbf{K}^3$. On a d'une part les égalités

$$p^2\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=p\left(p\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)=p\begin{pmatrix}0\\x+y+z\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0+(x+y+z)+0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\x+y+z\\0\end{pmatrix}=p\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},$$

ce qui montre l'égalité $p^2=p$, d'autre part les égalités

$$q^2\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=q\left(q\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)=q\begin{pmatrix}x+y\\0\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(x+y)+0\\0\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y\\0\\z\end{pmatrix}=q\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},$$

ce qui montre l'égalité $q^2=q$.

Déterminons $\operatorname{Ker} p$ et $\operatorname{Ker} q$. Soit $(a,b,c)\in\mathbf{K}^3$. On a d'une part les équivalences

$$\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\in\operatorname{Ker} p\iff p\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\iff\begin{pmatrix}0\\a+b+c\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\iff a+b+c=0,$$

ce qui montre que le noyau de p est le plan d'équation $x+y+z=0$, d'autre part les équivalences

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\in\operatorname{Ker} q &\iff q\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\iff\begin{pmatrix}a+b\\0\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\\
&\iff \begin{cases}b=-a\\c=0\end{cases}\iff\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\-a\\0\end{pmatrix}\iff\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\\
&\iff \exists\lambda\in\mathbf{K},\ \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\qquad\left(\begin{array}{l}\boxed{\Longrightarrow}\text{ prendre }\lambda:=a\\ \boxed{\Longleftarrow}\text{ égaliser les coordonnées}\\ \qquad\text{impose }\lambda=a\end{array}\right)\\
&\iff \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\in\mathbf{K}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \text{ ce qui montre que }\operatorname{Ker} q\text{ est la droite vectorielle dirigée par }\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Déterminons $\operatorname{Im} p$. Soit $x\in\operatorname{Im} p$. Soit $(a,b,c)\in\mathbf{K}^3$ tel que $x=p(a,b,c)$. Alors

$$x=\begin{pmatrix}0\\a+b+c\\0\end{pmatrix}=(a+b+c)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\in\mathbf{K}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \text{ ce qui montre l'inclusion }\operatorname{Im} p\subset\mathbf{K}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}.$$

Soit réciproquement $x\in\mathbf{K}(0,1,0)$. Soit $\lambda\in\mathbf{K}$ tel que $x=\lambda(0,1,0)$. Alors $x=(0,\lambda,0)=p(\lambda,0,0)\in\operatorname{Im} p$, ce qui montre l'inclusion $\mathbf{K}(0,1,0)\subset\operatorname{Im} p$. Par conséquent, l'image de p est la droite dirigée par le vecteur $(0,1,0)$.

Déterminons $\operatorname{Im} q$. Soit $x \in \operatorname{Im} q$. Soit $(a,b,c) \in \mathbf{K}^3$ tel que $x = q(a,b,c)$. Alors

$$x = \begin{pmatrix} a+b \\ 0 \\ c \end{pmatrix} = (a+b)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\},$$

ce qui montre l'inclusion $\operatorname{Im} q \subset \operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$. Soit réciproquement $x \in \operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$. Soient λ et μ deux scalaires tels que $x = \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Alors $x = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ \mu \end{pmatrix} = q\begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ \mu \end{pmatrix} \in \operatorname{Im} q$, ce qui montre l'inclusion $\operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \subset \operatorname{Im} p$. Par conséquent, l'image de q est le plan engendré par les vecteurs $(1,0,0)$ et $(0,0,1)$.

On déduit de ce qui précède les décompositions suivantes de l'espace $\mathbf{K}^3$:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^3 &= \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{K}^3 \ ; \ x+y+z=0\right\} \oplus \mathbf{K}(0,1,0) \\ \text{et } \mathbf{K}^3 &= \operatorname{Ker} q \oplus \operatorname{Im} q = \mathbf{K}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}. \end{aligned}$$

Remarque. On pourrait déterminer des générateurs de $\operatorname{Ker} p$ en écrivant pour tout vecteur (a,b,c) les équivalences

$$\begin{aligned} (a,b,c) \in \operatorname{Ker} p &\iff a+b+c=0 \iff c=-a-b \iff (a,b,c)=(a,b,-a-b) \\ &\iff \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &\iff \exists(\lambda,\mu) \in \mathbf{K}^2, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{array}{l} \boxed{\Longrightarrow} \text{ prendre } (\lambda,\mu) := (a;b) \\ \boxed{\Longleftarrow} \text{ égaliser les abcsisses donne} \\ \lambda = a, \text{ les ordonnées } \mu = \lambda \end{array}\right) \\ &\iff \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}. \end{aligned}$$

(a) Rappelons que l'application nulle est linéaire.

Si E contient des vecteurs non nuls, l'application nulle n'est pas surjective, *a fortiori* ne peut être un automorphisme.

Si $E = \{0\}$, alors l'application nulle est l'identité de E, donc est bijective, donc est un autormorphisme

Conclusion : l'application nulle est un automorphisme de E ssi $E = \{0\}$.

(b) Soit $f \in \operatorname{Aut} E$. Alors f est bijectif, donc à la fois injectif (d'où $\operatorname{Ker} f = \{0\}$) et surjectif (d'où $\operatorname{Im} f = E$.

Soit s une symétrie de E. Alors $s^2 = \operatorname{Id}$, donc s est inversible (d'inverse elle-même), donc est un automorphisme de E, d'où $\operatorname{Ker} s = \{0\}$ et $\operatorname{Im} s = E$.

Soit $\lambda \in \mathbf{K}$. Si $\lambda \neq 0$, alors $\lambda \operatorname{Id}$ est inversible (de réciproque $\frac{1}{\lambda}\operatorname{Id}$), d'où $\operatorname{Ker}(\lambda \operatorname{Id}) = \{0\}$ et $\operatorname{Im}(\lambda \operatorname{Id}) = E$. Si $\lambda = 0$, alors $\lambda \operatorname{Id}$ est l'application nulle qui est d'image nulle (tout vecteur a pour image 0) et de noyau tout l'espace E (tout vecteur est annulé).

(c) On a les équivalences

$$x \in \operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id}) \iff [f - \lambda \operatorname{Id}](x) = 0 \iff f(x) - \lambda \operatorname{Id}(x) = 0 \iff f(x) - \lambda x = 0 \iff f(x) = \lambda x..$$

(d) On a les équivalences

$$\begin{aligned} g\circ f=0 &\iff \forall x\in E,\ [g\circ f](x)=0 \\ &\iff \forall x\in E,\ g(f(x))=0 \\ &\iff \forall x\in E,\ f(x)\in \operatorname{Ker} g \\ &\iff \forall y\in \{f(x)\ ;\ x\in E\},\ y\in \operatorname{Ker} g \\ &\iff \forall y\in \operatorname{Im} f,\ y\in \operatorname{Ker} g \\ &\iff \operatorname{Im} f\subset \operatorname{Ker} g. \end{aligned}$$

(e) On a $(fg)^2=(fg)(fg)=f(gf)g=f\,\mathrm{Id}\,g=fg$, donc fg est un projecteur.

Montrons que f est injective. Soit $a\in E$ tel que $f(a)=0$. On a alors $a=\mathrm{Id}(a)=[g\circ f](a)=g(f(a))=g(0)=0$, *c. q. f. d.*. On en déduit $\operatorname{Ker} f=\{0\}$.

Montrons que g est surjective. Soit $y\in E$. Alors $g(f(y))=[g\circ f](y)=\mathrm{Id}(y)=y$, ce qui montre que $y\in\operatorname{Im} g$, *c. q. f. d.*. On déduit $\operatorname{Im} g=E$.

Il résulte de ce qui précède d'une part pour tout vecteur $x\in E$ les équivalences

$$x\in\operatorname{Ker} fg\iff [fg](x)=0\iff f(g(x))=0\iff g(x)\in\operatorname{Ker} f\iff g(x)\in\{0\}\iff g(x)=0\iff x\in\operatorname{Ker} g,$$

d'où l'égalité $\operatorname{Ker} fg=\operatorname{Ker} g$, d'autre part pour tout vecteur $y\in E$ les équivalences

$$\begin{aligned} y\in\operatorname{Im} fg &\iff \exists x\in E,\ y=[fg](x) \\ &\iff \exists x\in E,\ y=f(g(x)) \\ &\iff \exists i\in\{g(x)\ ;\ x\in E\},\ y=f(i) \\ &\iff \exists i\in\operatorname{Im} g,\ y=f(i) \\ &\iff \exists i\in E,\ y=f(i) \\ &\iff y\in\operatorname{Im} f,\qquad \text{d'où l'égalité }\ \operatorname{Im} fg=\operatorname{Im} f.. \end{aligned}$$

(f) Notons p l'application considérée. L'hypothèse $a\notin\operatorname{Ker}\varphi$ équivalant à $\varphi(a)\neq 0$, l'application p est bien définie. Montrons qu'elle est linéaire. Soient x et y deux vecteurs de E et λ un scalaire. On a

$$p(\lambda x+y)=\frac{\varphi(\lambda x+y)}{\varphi(a)}a=\frac{\lambda\varphi(x)+\varphi(y)}{\varphi(a)}a=\lambda\left(\frac{\varphi(x)}{\varphi(a)}a\right)+\frac{\varphi(y)}{\varphi(a)}a=\lambda p(x)+p(y),\ \textit{c. q. f. d.}.$$

Par ailleurs, on a pour tout vecteur $x\in E$

$$p^2(x)=p(p(x))=p\left(\frac{\varphi(x)}{\varphi(a)}a\right)=\frac{\varphi(x)}{\varphi(a)}p(a)=\frac{\varphi(x)}{\varphi(a)}\frac{\varphi(a)}{\varphi(a)}a=\frac{\varphi(x)}{\varphi(a)}a=p(x),$$

ce qui montre que p est un projecteur. Ses noyau et image sont donc supplémentaires dans E. Pour conclure, il suffit de montrer que $\operatorname{Im} p=\mathbf{K}a$ et $\operatorname{Ker} p=\operatorname{Ker}\varphi$.

Montrons l'égalité $\operatorname{Im} p=\mathbf{K}a$. Pour tout vecteur $x\in E$, on a $p(x)=\underbrace{\left(\frac{\varphi(x)}{\varphi(a)}\right)}_{\in\mathbf{K}}a\in\mathbf{K}a$, d'où l'inclusion $\subset$. Soit réciproquement $x\in\mathbf{K}a$. Soit $\lambda\in\mathbf{K}$ tel que $x=\lambda a$. Alors $p(\lambda a)=\frac{\varphi(\lambda a)}{\varphi(a)}a=\frac{\lambda\varphi(a)}{\varphi(a)}a=\lambda a=x$, ce qui montre que $x\in\operatorname{Im} p$, d'où l'inclusion $\supset$.

L'égalité $\operatorname{Ker} p=\operatorname{Ker}\varphi$ résulte des équivalences suivantes valides pour tout vecteur $x\in E$

$$x\in\operatorname{Ker} p\iff p(x)=0\iff\frac{\varphi(x)}{\varphi(a)}a=0\overset{\text{car } a\neq 0}{\iff}\frac{\varphi(x)}{\varphi(a)}=0\iff\varphi(x)=0\iff x\in\operatorname{Ker}\varphi.$$