Applications linéaires

(T. G. 16)

1. *L'application* $\left\{\begin{array}{ccc}\mathbf{K}^2 & \longrightarrow & \mathbf{K}\\ (a,b) & \longmapsto & a^2+b^2\end{array}\right.$ *est-elle une forme linéaire du* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel* $\mathbf{K}^2$ *?*
2. *Montrer que l'application "partie réelle" est un projecteur du* $\mathbf{R}$*-espace vectoriel* $\mathbf{C}$*. Quels sont ses noyau et image ?*
3. *Montrer que les endomorphismes du* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel* $\mathbf{K}$ *sont ses homothéties. En déduire ses automorphismes.*
4. *Montrer que l'application* $\left\{\begin{array}{ccc}\mathbf{K}^{\mathbf{N}} & \longrightarrow & \mathbf{K}^{\mathbf{N}}\\ (a_n) & \longmapsto & (a_{n+1}-9a_n)\end{array}\right.$ *est linéaire et déterminer son noyau.*
5. *Montrer que l'application* $\left\{\begin{array}{ccc}C^\infty(\mathbf{R},\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathbf{K}\\ f & \longmapsto & 3f''(18)-5\int_0^7 f\end{array}\right.$ *est une forme linéaire du* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel* $C^\infty(\mathbf{R},\mathbf{K})$*.*
6. *Montre que l'application* $\left\{\begin{array}{ccc}C^\infty(\mathbf{R},\mathbf{K}) & \longrightarrow & C^\infty(\mathbf{R},\mathbf{K})\\ f & \longmapsto & f'+2f\end{array}\right.$ *est un endomorphisme du* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel* $C^\infty(\mathbf{R},\mathbf{K})$ *dont on décrira le noyau.*
7. *Montrer que l'application* $\left\{\begin{array}{ccc}\mathbf{K}^3 & \longrightarrow & \mathbf{K}^3\\ \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix}2b+c\\a+c\\b+c-a\end{pmatrix}\end{array}\right.$ *est un automorphisme du* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel* $\mathbf{K}^3$*.*
8. *Montrer que les applications* $\left\{\begin{array}{ccc}\mathbf{K}^{\mathbf{N}} & \longrightarrow & \mathbf{K}^{\mathbf{N}}\\ (a_n) & \longmapsto & (18^n a_n)\end{array}\right.$ *et* $\left\{\begin{array}{ccc}\mathbf{K}^{\mathbf{N}} & \longrightarrow & \mathbf{K}^{\mathbf{N}}\\ (a_n) & \longmapsto & (42^n a_{n+7})\end{array}\right.$ *sont des endomorphismes du* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel* $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$*. En sont-ce des automorphismes ? Préciser leurs noyaux.*
9. *Montrer que l'application* $s:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbf{K}^{\mathbf{K}} & \longrightarrow & \mathbf{K}^{\mathbf{K}}\\ f & \longmapsto & f\circ(-\mathrm{Id})\end{array}\right.$ *est une symétrie du* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel* $\mathbf{K}^{\mathbf{K}}$*. Déterminer les noyaux* $\mathrm{Ker}\,(s-\mathrm{Id}_{\mathbf{K}^{\mathbf{K}}})$ *et* $\mathrm{Ker}\,(s+\mathrm{Id}_{\mathbf{K}^{\mathbf{K}}})$ *puis en déduire que toute fonction s'écrit d'une unique manière comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.*
10. *Montrer que les applications* $\left\{\begin{array}{ccc}\mathbf{K}^2 & \longrightarrow & \mathbf{K}^2\\ \binom{a}{b} & \longmapsto & \binom{b}{a}\end{array}\right.$ *et* $\left\{\begin{array}{ccc}\mathbf{K}^2 & \longrightarrow & \mathbf{K}^2\\ (a,b) & \longmapsto & \left(\frac{a+b}{\sqrt{2}},\frac{a-b}{\sqrt{2}}\right)\end{array}\right.$ *sont des symétries. En déduire deux décompositions de* $\mathbf{K}^2$ *en somme directe de deux sous-espaces vectoriels.*
11. *Montrer que les applications* $\left\{\begin{array}{ccc}\mathbf{K}^3 & \longrightarrow & \mathbf{K}^3\\ (a,b,c) & \longmapsto & (0,a+b+c,0)\end{array}\right.$ *et* $\left\{\begin{array}{ccc}\mathbf{K}^3 & \longrightarrow & \mathbf{K}^3\\ (a,b,c) & \longmapsto & (a+b,0,c)\end{array}\right.$ *sont des projecteurs dont on déterminera les noyaux et images. En déduire deux décompositions de* $\mathbf{K}^3$ *en somme directe de deux sous-espaces vectoriels.*
12. On fixe un espace vectoriel E.
    (a) *À quelle condition l'application nulle est-elle un automorphisme de* E *?*
    (b) *Déterminer les noyau et image d'une homothétie, d'une symétrie, d'un automorphisme de* E*.*
    (c) *Soit* $(\lambda,x)\in\mathbf{K}\times E$*. Montrer l'équivalence* $x\in\mathrm{Ker}\,(f-\lambda\,\mathrm{Id})\Longleftrightarrow f(x)=\lambda x$*.*
    (d) *Soit* $(f,g)\in L(E)^2$*. Montrer l'équivalence* $gf=0\Longleftrightarrow \mathrm{Im}\,f\subset\mathrm{Ker}\,g$*.*
    (e) *Soit* $(f,g)\in L(E)^2$ *tel que* $gf=\mathrm{Id}$*. Montrer que* fg *est un projecteur dont on déterminera les noyau et image.* (hint : montrer que f est injective et que g est surjective)
    (f) *Soit* φ *une forme linéaire sur* E*. On suppose que* φ *est non nulle et on fixe un vecteur* $a\in E$ *hors de* $\mathrm{Ker}\,\varphi$*. Montrer que l'application* $\left\{\begin{array}{ccc}E & \longrightarrow & E\\ x & \longmapsto & \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)}a\end{array}\right.$ *est un projecteur. En déduire que* $E=\mathbf{K}a\oplus\mathrm{Ker}\,\varphi$*.*