Suites
(T. G. 15)

1. Soit $n \in \mathbf{N}^*$.
On a $\left|\frac{\sin(n^{42})}{n}\right| \leq \frac{1}{n} \longrightarrow 0$, ce qui montre que la suite $\left(\frac{\sin(p^{42})}{p}\right)$ tend vers 0.
On a $\frac{\left\lfloor (n+\frac{1}{2})^2 \right\rfloor}{\left\lfloor (n-\frac{1}{2})^2 \right\rfloor} = \frac{\left\lfloor n^2+n+\frac{1}{4} \right\rfloor}{\left\lfloor n^2-n+\frac{1}{4} \right\rfloor} = \frac{n^2+n}{n^2-n} = \frac{1+\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}} \longrightarrow \frac{1+0}{1+0} = 1$.

2. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. L'hypothèse donne $2u_n \leq u_{n+1} + u_{n-1}$, ce qui réécrit $u_n - u_{n-1} \leq u_{n+1} - u_n$. Par conséquent, la suite $(u_{p+1} - u_p)$ est croissante. Soit par ailleurs $M > 0$ un majorant de (u_p) : on a alors $|u_{n+1} - u_n| \leq |u_{n+1}| + |u_n| \leq M + M$, ce qui montre que la suite $(u_{p+1} - u_p)$ est bornée. Le cours affirme alors qu'elle converge (vers son supremum).

3. Si (a_n) convergeait, elle serait bornée, donc la sous-suite $(a_{2n}) = (2n)$ aussi, ce qui est faux.
Si (a_n) tendait vers ∞, il en serait de même (d'après l'exercice 9) pour la sous-suite $(a_{2n+1}) = (0)$, ce qui est faux.

4. Il s'agit de montrer que la fonction $t \mapsto \frac{t+1}{t-1}$ fixe un ensemble contenant α. Essayons $\mathbf{K} \setminus \{1\}$ (qui contient α et sur lequel f est définie). Soit $t \in \mathbf{K} \setminus \{1\}$: on a alors les équivalences

$$\frac{t+1}{t-1} \notin \mathbf{K} \setminus \{1\} \iff \frac{t+1}{t-1} = 1 \iff t+1 = t-1 \iff 1 = -1,$$ ce qui est faux, d'où la stabilité annoncée.

5. Cherchons un ensemble contenant 42 et stable par $t \mapsto \sqrt{6+t}$. Un candidat évident est $\mathbf{R}_+$, ce qui montre l'existence et l'unicité de (u_n).
Montrons que $(u_n) \longrightarrow 3$. On observera que la limite donnée est fixe par $t \mapsto \sqrt{6+t}$ puisque $\sqrt{6+3} = \sqrt{9} = 3$.
Soit $n \in \mathbf{N}$. On a $|u_{n+1} - 3| = \left|\sqrt{6+u_n} - \sqrt{6+3}\right| = \frac{|(6+u_n)-(6+3)|}{\left|\sqrt{6+u_n}+\sqrt{6+3}\right|} \leq \frac{|u_n-3|}{3}$, d'où $3^{n+1}|u_{n+1} - 3| \leq 3^n |u_n - 3|$, ce qui montre que la suite $(3^p |u_p - 3|)$ décroît, donc est majorée par son premier terme $\left(3^0 |u_0 - 3|\right) = 39$, d'où $|u_n - 3| \leq \frac{39}{3^n} \longrightarrow 0$, *c. q. f. d.*.

6. Cherchons un ensemble contenant 1 et stable par $t \mapsto 3 - \sqrt{\frac{t}{2}}$. Essayons $[0,3]$ comme suggéré. Soit $t \in [0,3]$: on a alors les équivalences

$$3 - \sqrt{\frac{t}{2}} \in [0,3] \iff 0 \leq 3 - \sqrt{\frac{t}{2}} \leq 3 \iff 0 \leq \sqrt{\frac{t}{2}} \leq 3 \overset{\text{car } t \geq 0}{\iff} 0 \leq \frac{t}{2} \leq 3^2 \iff t \in [0,18],$$ ce qui est vrai,

d'où l'existence et l'unicité de (u_n).
Montrons que $(u_n) \longrightarrow 2$. On observera que la limite donnée est fixe par $t \mapsto 3 - \sqrt{\frac{t}{2}}$ puisque $3 - \sqrt{\frac{2}{2}} = 3 - 1 = 2$.
Soit $n \in \mathbf{N}$. On a $|u_{n+1} - 2| = \left|3 - \sqrt{\frac{u_n}{2}} - 2\right| = \left|\sqrt{\frac{u_n}{2}} - 1\right| = \frac{\left|\frac{u_n}{2} - 1\right|}{\left|\sqrt{\frac{u_n}{2}} + 1\right|} \leq \left|\frac{u_n}{2} - 1\right| = \frac{|u_n - 2|}{2}$, d'où $2^{n+1}|u_{n+1} - 2| \leq 2^n |u_n - 2|$, ce qui montre que la suite $(2^p |u_p - 2|)$ décroît, donc est majorée par son premier terme $\left(2^0 |u_0 - 2|\right) = 1$, d'où $|u_n - 2| \leq \frac{1}{2^n} \longrightarrow 0$, *c. q. f. d.*.

7. Le T. G. précédent montre que $\mathbf{K}$, $\mathbf{K}_{cv}^{\mathbf{N}}$ et $\mathbf{K}_0^{\mathbf{N}}$ sont des sev. Il est par ailleurs clair que $\mathbf{K}$ et $\mathbf{K}_0^{\mathbf{N}}$ sont tous deux inclus dans $\mathbf{K}_{cv}^{\mathbf{N}}$
Montrons que $\mathbf{K}$ et $\mathbf{K}_0^{\mathbf{N}}$ sont en somme directe. Soit a dans $\mathbf{K} \cap \mathbf{K}_0^{\mathbf{N}}$: alors $a \in \mathbf{K}$, donc est constante, donc tend vers la valeur commune à tous ses termes ; or $a \in \mathbf{K}_0^{\mathbf{N}}$, donc cette limite doit être nulle, donc tous les termes de a sont nuls, d'où $a = 0$.
Montrons que $\mathbf{K}_{cv}^{\mathbf{N}} = \mathbf{K} + \mathbf{K}_0^{\mathbf{N}}$. Soit a une suite convergente. On écrit alors $a = \underbrace{\lim a}_{\text{constante}} + \underbrace{a - \lim a}_{\longrightarrow \lim a - \lim a = 0} \in \mathbf{K} + \mathbf{K}_0^{\mathbf{N}}$, ce qui conclut.

   (a) Non si $(a_n) = (-1)^n$.

(b) Non si $(a_n) = (-1)^n$.

(c) Non si $(a_n) = (n)$ et $(b_n) = (-n)$.

(d) Non si $(a_n) = (b_n) = (-1)^n$.

(e) Si $(a_n) = \left(\left\{ \begin{array}{c} n \text{ si } n \text{ pair} \\ 0 \text{ sinon} \end{array} \right.\right)$ et $(a_n) = \left(\left\{ \begin{array}{c} n \text{ si } n \text{ impair} \\ 0 \text{ sinon} \end{array} \right.\right)$, alors $(a_n + b_n) = (n) \longrightarrow \infty$ mais (a_n) comme (b_n) possède une sous-suite majorée et ne peut donc tendre vers ∞ (*cf.* exercice 13).

8. Pour tout entier $p \in \mathbf{N}$, on note I_p l'inégalité $\varphi(p) \geq p$.

Puisque φ est à valeurs dans $\mathbf{N}$ qui est minoré par 0, on a $\varphi(0) \geq 0$, *i. e.* I_0.

Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que I_n. On a alors $\varphi(n+1) > \varphi(n) \overset{I_n}{\geq} n$, d'où (toujours car φ prend des valeurs *entières*) $\varphi(n+1) \geq n+1$, *i. e.* I_{n+1}.

9. Soit φ une extractrice. Soit $A > 0$. Soit $N \in \mathbf{N}$ tel que $n \geq N \Longrightarrow a_n \geq A$. Soit $p \geq N$: l'exercice 8 montre que $\varphi(p) \geq p \geq N$, d'où $a_{\varphi(p)} \geq A$, ce qui conclut.

10. Soit par l'absurde une extractrice φ telle que $\forall n \in \mathbf{N},\ n^2 + 18 = \varphi(n)^2$. Soit $p \in \mathbf{N}$: on a

$$18 = \varphi(p)^2 - p^2 = \underbrace{(\varphi(p) - p)}_{\text{entier}}\underbrace{(\varphi(p) + p)}_{\text{entier}},$$

ce qui montre que $\varphi(p) + p$ est un diviseur de 18, donc est borné par 18, ce qui est faux pour $p \geq 18$ (vu que $\varphi(p) + p \geq p + p = 2p$ toujours d'après l'exercice 8).

11. $\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons $|a_n| \longrightarrow \infty$. Soient $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbf{N}$. On a les implications $\left|\frac{1}{a_n}\right| \leq \varepsilon \Longleftarrow |a_n| \geq \frac{1}{\varepsilon}$, ce qui peut être réalisé pour n assez grand vu l'hypothèse (remplacer A par $\frac{1}{\varepsilon}$ dans la définition du cours).

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons $\frac{1}{a_n} \longrightarrow 0$. Soient $A > 0$ et $n \in \mathbf{N}$. On a les implications $a_n \geq A \Longleftarrow \frac{1}{a_n} \leq \frac{1}{A} \Longleftarrow \left|\frac{1}{a_n}\right| \leq \frac{1}{A}$, ce qui peut être réalisé pour n assez grand vu l'hypothèse (remplacer ε par $\frac{1}{A}$ dans la définition du cours).

12. Si (a_n) est constante à partir d'un certain rang, disons $n \geq N \Longrightarrow a_n = a$ pour un certain $(n, a) \in \mathbf{N} \times \mathbf{K}$, il est clair que (a_n) converge a partir du rang N (puisque $\forall \varepsilon > 0,\ n \geq N \Longrightarrow |a_n - a| = 0 < \varepsilon$).

Supposons réciproquement que (a_n) converge vers un scalaire a. Alors d'une part a_n vaudra a à $\frac{1}{3}$ près pour tout n assez grand, d'autre part un intervalle de rayon $\frac{1}{3}$ ne contient qu'un plus un entier, ce qui montre que a_n ne prend qu'une seule valeur à partir pour tout n assez grand, *c. q. f. d.*.

13. Soit (a_n) une suite réelle.

Soit φ une extractrice telle que $\left(a_{\varphi(n)}\right)$ soit majorée. Appelons M un des majorants de $\left(a_{\varphi(n)}\right)$. Alors pour tout $N \in \mathbf{N}$ le terme $a_{\varphi(N)}$ ne dépasse pas $M + 18$; puisque $\varphi(N) \geq N$ (*cf.* exercice 8), on en déduit $\exists A > 0,\ \forall N \in \mathbf{N},\ \exists p \geq N,\ a_p \ngeq A$ (prendre $A := M + 18$ et $p := \varphi(N)$), ce qui est la négation de $\forall A > 0,\ \exists N \in \mathbf{N},\ p \geq N \Longrightarrow a_p \geq A$, d'où l'impossibilité d'avoir $a_n \longrightarrow \infty$.

Supposons que (a_n) ne tende par vers l'infini. On a donc : $\exists A > 0,\ \forall N \in \mathbf{N},\ \exists n \geq N,\ a_n < A$. Par conséquent, pour tout entier $p \in \mathbf{N}$, la partie $\{n \in \mathbf{N}\ ;\ n > p \text{ et } a_n < A\}$ est non vide (remplacer N par $p+1$), donc admet un minimum que nous noterons μ_p. Nous avons donc $\forall p \in \mathbf{N}$, $\left\{ \begin{array}{l} a_{\mu_p} < A \\ \mu_p > p \end{array} \right.$. En itérant la fonction μ, on définit une extractrice $\varphi : n \mapsto \mu^{\circ n}(0)$ vu que $\varphi(k+1) = \mu_{\varphi(k)} > \varphi(k)$ pour tout $k \in \mathbf{N}$. La sous-suite $\left(a_{\varphi(n)}\right)$ est alors majorée par A.

14. Soit (p_n) une suite périodique : la partie $\mathcal{T} := \{t \in \mathbf{N}^*\ ;\ \forall n \in \mathbf{N},\ p_{n+t} = p_n\}$ est alors non vide – appelons T son plus petit élément. Il est clair que (p_n) est constante ssi $T = 1$, auquel cas (p_n) converge.

Supposons $T \neq 1$, *i. e.* $T \geq 2$, et montrons que (p_n) admet deux sous-suites convergentes de limites distinctes, ce qui empêchera sa convergence. Puisque $T - 1 \in \mathbf{N}^*$, la minimalité de T empêche $T - 1$ d'appartenir à $\mathcal{T}$, *i. e.* d'avoir $\forall n \in \mathbf{N},\ p_{n+(T-1)} = p_n$. On peut donc considérer un entier n_0 tel que $p_{n_0} \neq p_{n_0+(T-1)}$. Alors les sous-suites (p_{n_0+Tn}) et $\left(p_{(n_0-1)+Tn}\right)_{n\geq 1}$ sont constantes (par T-périodicité) et convergent respectivement vers p_{n_0} et p_{n_0+T-1}, ce qui conclut.

15. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $N \in \mathbf{N}$ tel que $n \geq N \Longrightarrow |o_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Soit $n \geq N$: on a

$$\left|\frac{\sum_{d=1}^{n} o_d}{n}\right| \leq \frac{\sum_{d=1}^{N} |o_d| + \sum_{N<d\leq n} \overbrace{|o_d|}^{\leq \frac{\varepsilon}{2}}}{n} \leq \frac{\sum_{d=1}^{N} |o_d|}{n} + \sum_{N<d\leq n} \frac{\varepsilon}{2n}.$$

Puisque la suite $\left(\frac{1}{p}\sum_{d=1}^{N}|o_d|\right)_{p\in\mathbf{N}}$ tend vers 0, on peut considérer un entier N' tel que $p\geq N\Longrightarrow\frac{1}{p}\sum_{d=1}^{N}|o_d|\leq\frac{\varepsilon}{2}$. On en déduit, si $n\geq N'$:

$$\left|\frac{\sum_{d=1}^{n}o_d}{n}\right|\leq\frac{\varepsilon}{2}+\underbrace{\frac{n-N}{n}}_{\leq\frac{n-0}{n}=1}\frac{\varepsilon}{2}\leq\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Nous avons donc montré $k\geq N+N'\Longrightarrow\left|\frac{\sum_{d=1}^{k}o_d}{n}\right|\leq\varepsilon$, ce qui conclut.

16. La fonction $(x,y)\overset{f}{\longmapsto}\left(\frac{x+y}{2},\sqrt{xy}\right)$ stabilise $\mathbf{R}_+^{*2}$ qui contient (α,γ), d'où l'existence d'une suite $(u_n)\in\left(\mathbf{R}_+^{*2}\right)^{\mathbf{N}}$ telle que $u_0=(\alpha,\gamma)$ et $\forall p\in\mathbf{N},\ u_{p+1}=f(u_p)$. On définit alors (a_n) et (g_n) comme les suites "abscisse" et "ordonnée" de (u_n).

Montrons $\forall p\in\mathbf{N},\ a_p\geq g_p$. Soit $n\in\mathbf{N}$: si $n=0$, on a bien $a_0=\alpha\geq\gamma=g_0$, sinon on a

$$a_{n+1}-g_{n+1}=\frac{a_n+g_n}{2}-\sqrt{a_ng_n}=\frac{\left(\sqrt{a_n}-\sqrt{g_n}\right)^2}{2}\geq 0,\ c.\ q.\ f.\ d..$$

Montrons alors que (a_p) décroît et que (g_p) croît. Soit $n\in\mathbf{N}$: on a

$$\begin{array}{rcl}a_{n+1}-a_n&=&\dfrac{g_n+a_n}{2}-a_n=\dfrac{g_n-a_n}{2}\leq 0\text{ et}\\ g_{n+1}-g_n&=&\sqrt{a_ng_n}-g_n=\sqrt{g_n}\underbrace{\left(\sqrt{a_n}-\sqrt{g_n}\right)}_{\text{du signe de }a_n-g_n}\geq 0,\ c.\ q.\ f.\ d..\end{array}$$

Pour tout entier $p\geq 0$, notons I_p l'inégalité $|a_p-g_p|\leq\lambda\frac{A^p}{2^{2^p}}$. On a les équivalences

$$I_0\Longleftrightarrow|a_0-g_0|\leq\lambda\frac{A^0}{2^{2^0}}\Longleftrightarrow|\alpha-\gamma|\leq\frac{42\,|\alpha-\gamma|}{2}\Longleftrightarrow 2\leq 42,\text{ ce qui est vrai, d'où }I_0.$$

Soit $n\in\mathbf{N}$ tel que I_n. Reprenons le calcul ci-dessus :

$$2\left(a_{n+1}-g_{n+1}\right)=\left(\sqrt{a_n}-\sqrt{g_n}\right)^2=\left(\frac{a_n-g_n}{\sqrt{a_n}+\sqrt{g_n}}\right)^2\overset{\text{d'après }I_n}{\leq}\left(\frac{\lambda\frac{A^{n+1}}{2^{2^n}}}{\sqrt{a_n}+\sqrt{g_n}}\right)^2.$$

Pour conclure I_{n+1}, il suffirait de montrer que ce dernier est majoré par $\lambda\frac{A^{(n+1)+1}}{2^{2^{n+1}}}$. Or on a les équivalences

$$\left(\frac{\lambda\frac{A^{n+1}}{2^{2^n}}}{\sqrt{a_n}+\sqrt{g_n}}\right)^2\leq\lambda\frac{A^{(n+1)+1}}{2^{2^{n+1}}}\Longleftrightarrow\frac{\lambda^2\frac{A^{2n+2}}{2^{2^{n+1}}}}{\left(\sqrt{a_n}+\sqrt{g_n}\right)^2}\leq\lambda\frac{A^{n+2}}{2^{2^{n+1}}}\Longleftrightarrow\lambda A^n\leq\left(\sqrt{a_n}+\sqrt{g_n}\right)^2.$$

Par ailleurs, on peut minorer d'une part $\left(\sqrt{a_n}+\sqrt{g_n}\right)^2\geq\left(0+\sqrt{g_n}\right)^2=g_n\geq\gamma$ (par croissance de (g_p)), d'autre part $A^n\leq A$ (car $A\in[0,1]$), d'où l'inégalité $\frac{\left(\sqrt{a_n}+\sqrt{g_n}\right)^2}{\lambda}\geq\frac{\gamma}{\lambda}\geq A\geq A^n$, $c.\ q.\ f.\ d..$

Concernant l'adjacence demandée, il reste à montrer que $a_n-g_n\longrightarrow 0$. Soit $n\in\mathbf{N}$: utilisant ce qui précède, on obtient

$$|a_n-g_n|\leq\underbrace{\lambda A^{n+1}}_{\substack{\text{bornée}\\\text{car }A\leq 1}}\underbrace{\frac{1}{2^{2n}}}_{\longrightarrow 0}\longrightarrow 0,\ c.\ q.\ f.\ d..$$