Suites
(T. G. 15)

1. *Étudier la convergence des suites* $\left(\frac{\sin(n^{42})}{n}\right)$ *et* $\left(\frac{\left\lfloor\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\right\rfloor}{\left\lfloor\left(n-\frac{1}{2}\right)^2\right\rfloor}\right)$.
2. *Soit* (u_n) *une suite réelle bornée telle que* $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ u_n \leq \frac{u_{n+1}+u_{n-1}}{2}$. *Montrer que la suite* $(u_{n+1} - u_n)$ *converge.*
3. *Pour tout entier* $k \in \mathbf{N}$, *on définit* a_k *comme valant* k *si* k *est pair et* 0 *sinon. Montrer que la suite* (a_n) *ne converge pas et ne tend pas vers* ∞.
4. *Soit* $\alpha \neq 1$ *un scalaire : montrer l'existence d'une suite* (u_n) *telle que* $u_0 = \alpha$ *et* $\forall p \in \mathbf{N},\ u_{p+1} = \frac{u_p+1}{u_p-1}$.
5. *Montrer l'existence et la convergence vers* 3 *de la suite* (u_n) *définie par* $u_0 = 42$ *et* $\forall k \in \mathbf{N},\ u_{k+1} = \sqrt{6+u_k}$.
6. *Montrer l'existence et la convergence vers* 2 *de la suite* $(u_n) \in [0,3]^{\mathbf{N}}$ *définie par* $u_0 = 1$ *et* $\forall k \in \mathbf{N},\ u_{k+1} = 3 - \sqrt{\frac{u_k}{2}}$.
7. *On abrège par* $\mathbf{K}$ *l'ensemble des suites constantes, par* $\mathbf{K}_{cv}^{\mathbf{N}}$ *l'ensemble des suites convergentes et par* $\mathbf{K}_0^{\mathbf{N}}$ *l'ensemble des suites tendant vers* 0. *Montrer que* $\mathbf{K}$ *et* $\mathbf{K}_0^{\mathbf{N}}$ *sont deux sev supplémentaires dans* $\mathbf{K}_{cv}^{\mathbf{N}}$.
8. *Soient deux suites* (a_n) *et* (b_n).
   (a) *Si* (a_n) *est bornée, converge-t-elle ?*
   (b) *Si* $(|a_n|)$ *converge, est-ce que* (a_n) *converge ?*
   (c) *Si* $(a_n + b_n)$ *converge, est-ce que* (a_n) *ou* (b_n) *converge ?*
   (d) *Si* $(a_n b_n)$ *converge, est-ce que* (a_n) *ou* (b_n) *converge ?*
   (e) *Si* $a_n + b_n \longrightarrow \infty$, *est-ce que* $a_n \longrightarrow \infty$ *ou* $b_n \longrightarrow \infty$ *?*
9. *Soit* φ *une extractrice. Montrer par récurrence que* $\forall n \in \mathbf{N},\ \varphi(n) \geq n$.
10. *Soit* (a_n) *une suite réelle tendant vers* ∞. *Montrer que toutes ses sous-suites tendent vers* ∞.
11. *Montrer que la suite* $\left(n^2 + 18\right)$ *n'est pas une sous-suite de* $\left(n^2\right)$.
12. *Montrer proprement l'équivalence* $a_n \longrightarrow -\infty \iff -a_n \longrightarrow \infty$ *pour toute suite réelle* (a_n).
13. *Soit* (a_n) *une suite à valeurs dans* $\mathbf{Z}$. *Montrer que* (a_n) *converge ssi* (a_n) *est constante à partir d'un certain rang.*
14. *Montrer qu'une suite réelle ne tend pas vers* ∞ *ssi elle admet une sous-suite majorée.*
15. *Montrer qu'une suite périodique*[1] *converge ssi elle est constante.*
16. *Soit* (o_n) *une suite tendant vers* 0. *Montrer que la suite "moyenne"* $\left(\frac{\sum_{d=1}^{n} o_d}{n}\right)$ *tend aussi vers* 0.
17. *Soient* $\alpha > \gamma$ *deux réels strictement positifs. Montrer l'existence de deux suites* (a_n) *et* (g_n) *telles que* $\binom{a_0}{g_0} = \binom{\alpha}{\gamma}$ *et* $\forall n \in \mathbf{N},\ \begin{cases} a_{n+1} = \frac{a_n+g_n}{2} \\ g_{n+1} = \sqrt{a_n g_n} \end{cases}$. *Comparer ces deux suites, montrer qu'elles sont monotones, puis montrer par récurrence l'inégalité* $\forall p \in \mathbf{N}^*,\ |a_p - g_p| \leq \lambda \frac{A^{p+1}}{2^{2^p}}$ *où* $\lambda := 42\,|\alpha - \gamma|$ *et* $A := \min\left\{1, \frac{\gamma}{\lambda}\right\}$. *En déduire que les suites* (a_n) *et* (g_n) *sont adjacentes.*

[1] Une suite (a_n) est dite ***périodique*** si $\exists T \in \mathbf{N}^*,\ \forall n \in \mathbf{N},\ a_{n+T} = a_n$.