Espaces vectoriels
(T. G. 14)

1. Puisqu'un sous-espace vectoriel contient 0, son complémentaire ne contient pas ce dernier et ne peut donc être un sous-espace vectoriel.

2. Soient E un espace vectoriel et $A \subset E$. Dire que A est stable par l'homothétie de rapport nul s'écrit $\forall a \in A,\ 0a \in A$, *i. e.* $\forall a \in A,\ 0 \in A$, ce qui équivaut à $0 \in A$ SAUF SI A EST VIDE. C'est pourquoi, dans les critères pour être un sous-espace vectoriel, on ne peut pas se passer de l'appartenance du vecteur nul en la disant impliquée par la stabilité par homothéties.

3. Pour chacun des ensembles qui suit, on regarde tout d'abord si le vecteur nul lui appartient puis s'il est stable par combinaison linéaire.

(a) Notons $V := \left\{(r, s, t) \in \mathbf{K}^3\ ;\ 18r + 42t = s\right\}$.
Puisque $18 \cdot 0 + 42 \cdot 0 = 0$, le vecteur nul $(0, 0, 0)$ appartient à V
Soient (a, b, c) et (α, β, γ) dans V et λ un scalaire. On a alors

$$18\,(\lambda a + \alpha) + 42\,(\lambda c + \gamma) = \lambda\,(18a + 42c) + (18\alpha + 42\gamma) = \lambda b + \beta,$$

ce qui montre que le vecteur $(\lambda a + \alpha, \lambda b + \beta, \lambda c + \gamma) = \lambda\,(a, b, c) + (\alpha, \beta, \gamma)$ appartient à V.

(b) Posons $V := \left\{(x, y, z) \in \mathbf{K}^3\ ;\ x = 7z\right\}$.
Puisque $0 = 7 \cdot 0$, le vecteur nul $(0, 0, 0)$ appartient à V
Soient (a, b, c) et (α, β, γ) dans V et λ un scalaire. On a alors

$$(\lambda a + \alpha) = \lambda\,(a) + \alpha = \lambda\,(7c) + 7\gamma = 7\,(\lambda c + \gamma)\,,$$

ce qui montre que le vecteur $(\lambda a + \alpha, \lambda b + \beta, \lambda c + \gamma) = \lambda\,(a, b, c) + (\alpha, \beta, \gamma)$ appartient à V.

(c) Non car le vecteur nul ne satisfait pas l'équation définissante $(0 + 1 \neq 4 \cdot 0 + 0)$.

(d) Définissons $V := \{f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{K}\ ;\ \exists C \in \mathbf{K},\ \forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = C\}$.
La fonction nulle appartient à V (prendre $C := 0$ dans la définition de V).
Soient f et g dans V et λ un scalaire. Soit $(A, B) \in \mathbf{K}^2$ tel que $\forall x \in \mathbf{R},\ \left\{\begin{array}{l} f(x) = A \\ g(x) = B \end{array}\right.$. On a alors

$$\forall x \in \mathbf{R},\ [\lambda f + g](x) = \lambda f(x) + g(x) = \lambda A + B, \text{ ce qui montre que } \lambda f + g \in V$$
(prendre $C := \lambda A + B$ dans la définition de V).

(e) Non car il n'est pas stable par homothéties : la fonction constante 1 est positive mais son homothétée de rapport -1 n'est pas une fonction positive.

(f) Notons $V := \{f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{K}\ ;\ \forall x \in \mathbf{R},\ f(-x) = f(x)\}$.
La fonction nulle appartient à V vu que $\forall x \in \mathbf{R},\ 0(-x) = 0 = 0(x)$.
Soient f et g dans V et λ un scalaire. On a alors

$$\forall x \in \mathbf{R},\ [\lambda f + g](-x) = \lambda f(-x) + g(-x) = \lambda f(x) + g(x) = [\lambda f + g](x)\,, \text{ ce qui montre que } \lambda f + g \in V.$$

(g) Posons $V := \{f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{K}\ ;\ \forall x \in \mathbf{R},\ f(-x) = -f(x)\}$.
La fonction nulle appartient à V vu que $\forall x \in \mathbf{R},\ 0(-x) = 0 = -0 = -0(x)$.
Soient f et g dans V et λ un scalaire. On a alors

$$\forall x \in \mathbf{R},\ [\lambda f + g](-x) = \lambda f(-x) + g(-x) = -\lambda f(x) - g(x) = -[\lambda f + g](x)\,, \text{ ce qui montre que } \lambda f + g \in V.$$

(h) Non car la fonction nulle ne vaut pas 18 en 42 (elle y vaut 0).

(i) Notons $V := \left\{f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{K} \ ; \ \exists (u,v,w) \in \mathbf{R}^3, \ \forall x \in \mathbf{R}, \ f(x) = ux^2 + vx + w\right\}$.
La fonction nulle appartient à V (prendre $(u,v,w) = (0,0,0)$ dans la définition de V).
Soient f et F dans V et λ un scalaire. Soient (a,b,c) et (A,B,C) dans $\mathbf{R}^3$ tels que $\forall x \in \mathbf{R}$, $\left\{ \begin{array}{l} f(x) = ax^2 + bx + c \\ F(x) = Ax^2 + Bx + C \end{array} \right.$. On a alors

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbf{R}, \ [\lambda f + F](x) &= \lambda f(x) + g(x) \\ &= \lambda \left(ax^2 + bx + c\right) + \left(Ax^2 + Bx + C\right) \\ &= (\lambda a + A) x^2 + (\lambda b + B) x + (\lambda c + C), \\ &\quad \text{ce qui montre que } \lambda f + g \in V \\ &\quad \text{(prendre } (u,v,w) := (\lambda a + A, \lambda a + A, \lambda c + C) \text{ dans la définition de } V\text{).} \end{aligned}$$

(j) Posons $V := \{f \in C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \ ; \ f(18) = f'(42)\}$.
La fonction nulle appartient à V vu qu'elle est de classe C^∞ et que $0(18) = 0 = 0'(42)$.
Soient f et g dans V et λ un scalaire. Alors $\lambda f + g$ est de classe C^∞ et on a

$$[\lambda f + g](18) = \lambda f(18) + g(18) = \lambda f'(42) + g'(42) = [\lambda f + g]'(42), \text{ ce qui montre que } \lambda f + g \in V.$$

(k) Posons $V := \left\{f \in C^0(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \ ; \ \int_0^1 t f(t)\, dt = 0\right\}$.
La fonction nulle appartient à V vu qu'elle est continue et que $\int_0^1 t \cdot 0(t)\, dt = \int_0^1 0 dt = 0$.
Soient f et g dans V et λ un scalaire. Alors $\lambda f + g$ est continue et on a

$$\begin{aligned} \int_0^1 t \cdot [\lambda f + g](t)\, dt &= \int_0^1 t(\lambda f(t) + g(t))\, dt = \lambda \int_0^1 t f(t)\, dt + \int_0^1 g(t)\, dt = \lambda 0 + 0 = 0, \\ &\quad \text{ce qui montre que } \lambda f + g \in V. \end{aligned}$$

(l) (même démonstration qu'à la question 3d en remplaçant $\mathbf{R}$ par $\mathbf{N}$)
Définissons $V := \left\{(u_n) \in \mathbf{K}^{\mathbf{N}} \ ; \ \exists C \in \mathbf{K}, \ \forall n \in \mathbf{N}, \ u_n = C\right\}$.
La suite nulle appartient à V (prendre $C := 0$ dans la définition de V).
Soient (a_n) et (b_n) dans V et λ un scalaire. Soit $(A,B) \in \mathbf{K}^2$ tel que $\forall n \in \mathbf{N}$, $\left\{ \begin{array}{l} a_n = A \\ b_n = B \end{array} \right.$. On a alors

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbf{N}, \ [\lambda a + b]_n &= \lambda a_n + b_n = \lambda A + B, \text{ ce qui montre que } (\lambda a_n + b_n) \in V \\ &\quad \text{(prendre } C := \lambda A + B \text{ dans la définition de } V\text{).} \end{aligned}$$

(m) Non car il n'est pas stable par homothéties : la suite (1) est positive mais son homothétée de rapport -1 n'est pas une suite positive.

(n) Notons $V := \left\{(u_n) \in \mathbf{K}^{\mathbf{N}} \ ; \ \exists \lambda \in \mathbf{K}, \ u_n \longrightarrow \lambda\right\}$.
La suite nulle converge (vers 0), donc appartient à V.
Soient (a_n) et (b_n) dans V et λ un scalaire. Le cours nous dit alors que la suite $(\lambda a_n + b_n)$ tend vers $\lambda \lim a_n + \lim b_n$, donc appartient à V.

(o) Non car la suite nulle n'est pas divergente.

(p) Non car la suite nulle ne tend pas vers 18.

(q) Notons $V := \left\{(u_n) \in \mathbf{K}^{\mathbf{N}} \ ; \ u_n \longrightarrow 0\right\}$.
La suite nulle tend vers 0, donc appartient à V.
Soient (a_n) et (b_n) dans V et λ un scalaire. Le cours nous dit alors que la suite (λa_n) tend vers 0, donc la somme $(\lambda a_n) + (b_n)$ également, ce qui montre que $(\lambda a_n + b_n)$ appartient à V.

(r) Non car la suite nulle ne tend pas vers ∞.

(s) Non car ils ne sont pas stables par homothéties : montrons cela.
Le complexe $i\sqrt{5} = 0 + i\sqrt{5} \cdot 1$ appartient à $\mathbf{R} + i\sqrt{5}\mathbf{Q}$ mais pas son homothété de rapport $\sqrt{10}$: il y aurait sinon un réel a et un rationnel q tels que $a + iq\sqrt{5} = \sqrt{10}i$, d'où $q = \sqrt{2}$ qui ne serait pas rationnel.

De même le complexe $1 = 1 + \sqrt{2} \cdot 0$ appartient à $\mathbf{Q} + \sqrt{2}\mathbf{Q}$ mais pas son homothété de rapport $\sqrt{6}$: soient par l'absurde deux rationnels a et b tels que $a + b\sqrt{2} = \sqrt{6}$; la nullité de b est impossible car entrainerait la rationnalité de $a = \sqrt{6}$, la nullité de a impliquerait la rationnalité de $b = \sqrt{3}$, mais alors élever au carré permet d'isoler $\sqrt{2} = \frac{6-a^2-2b^2}{2ab} \in \mathbf{Q}$, d'où la contradiction.

4. Non et non, considérer trois droites distinctes dans le plan passant toutes trois par l'origine. Par exemple, si ces droites sont dirigées par 1, i et $1+i$, alors le vecteur $1+i$ peut s'écrire $(1) + (i) + (0) = (0) + (0) + (1+i)$, ce qui contredirait l'unicité de sa décomposition.

5. (Notons E l'espace vectoriel en contexte.)

   Si c'était le cas, puisque E est un sous-espace vectoriel, on pourrait calculer $E \oplus E$, notation qui impose $E \cap E = \{0\}$, *i. e.* $E = \{0\}$. Donc $\oplus$ n'est (presque) jamais une l. c. i..

   Soient A, B et C trois sous-espaces vectoriels de E donnant sens aux sous-espaces vectoriels $A \oplus (B \oplus C)$ et $(A \oplus B) \oplus C$. Ensemblistement, les deux parties précédentes valent chacune la somme $A + B + C = \{a + b + c \ ; \ (a, b, c) \in A \times B \times C\}$. Pour pouvoir écrire $A \oplus B \oplus C$ à la place, il faudrait montrer que A, B et C sont en somme directe. Allons-y. Soient (a, b, c) et (a', b', c') dans $A \times B \times C$ tel que $a + b + c = a' + b' + c'$. Alors le vecteur $\underbrace{a' - a}_{\in A} = \underbrace{(b - b') + (c - c')}_{\in B+C}$ est nul puisque A et $B + C$ sont en somme directe, ce qui force d'autre part $a = a'$, d'autre part $\underbrace{b - b'}_{\in B} = \underbrace{c' - c}_{\in C}$; ce dernier vecteur est nul car B et C sont en somme directe, d'où les égalités $b = b'$ et $c = c'$, ce qui conclut.

6.

   (a) $\mathbf{R}$ et $i\mathbf{R}$ sont des droites vectorielles, donc des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{C}$. Tout complexe s'écrit d'une unique manière de la forme $a + ib$, ce qui signifie exactement $\mathbf{C} = \mathbf{R} \oplus i\mathbf{R}$.

   (b) $\mathbf{R}\cos$ et $\mathbf{R}\sin$ sont des droites vectorielles, donc des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$. Les solutions de l'équation $f'' = f$ sont les fonctions de la forme $t \mapsto \lambda \cos t + \mu \sin t$ pour λ et μ décrivant $\mathbf{R}$, ce qui signifie exactement l'égalité

   $$\{f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \ ; \ f \text{ deux fois dérivable et } f'' = f\} = \mathbf{R}\cos + \mathbf{R}\sin .$$

   Montrons que la somme est directe, *i. e.* que l'intersection $\mathbf{R}\cos \cap \mathbf{R}\sin$ est nulle. Soit $f \in \mathbf{R}\cos \cap \mathbf{R}\sin$. Soient λ et μ tels que $f = \lambda \cos = \mu \sin$. Évaluer en 0 donne $\lambda = \lambda \cos 0 = \mu \sin 0 = 0$, d'où $f = 0 \cos = 0$, *c. q. f. d.*.

   (c) On a toujours $V + \{0\} = \{v + 0 \ ; \ v \in V\} = \{v \ ; \ v \in V\} = V$ pour tout sous-espace vectoriel V. D'autre part, l'intersection $V \cap \{0\}$ est incluse dans l'intersecté de droite, donc (puisqu'elle contient toujours 0) égale $\{0\}$, ce qui montre que la somme est directe.

   (d) Soit $\varphi \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}}$. Écrire $\varphi = \underbrace{(\varphi - \varphi(42))}_{\text{nulle en 42}} + \underbrace{\varphi(42)}_{\text{constante}}$ montre que

   $$\mathbf{R}^{\mathbf{R}} = \{f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \ ; \ f(42) = 0\} \oplus \{f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \ ; \ f \text{ constante}\} .$$

   Pour montrer que la somme est directe, prenons une fonction f dans l'intersection : alors f est constante et nulle en 42, donc $f = f(42) = 0$, *c. q. f. d.*.

   (e) En procédant comme à la question précédente, on montrerait dans un premier temps que

   $$C^0(\mathbf{R}, \mathbf{R}) = \left\{f \in C^0(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \ ; \ f(0) = 0\right\} \oplus \left\{f \in C^0(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \ ; \ f \text{ constante}\right\} .$$

   D'après la question 5 (associativité de $\oplus$), il reste à montrer la décomposition du sous-espace vectoriel de gauche

   $$\left\{f \in C^0(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \ ; \ f(0) = 0\right\} = \left\{f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \ ; \ \begin{array}{c} f \text{ continue et} \\ \forall t < 0, \ f(t) = 0 \end{array}\right\} \oplus \left\{f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \ ; \ \begin{array}{c} f \text{ continue et} \\ \forall t > 0, \ f(t) = 0 \end{array}\right\} .$$

   Montrons l'inclusion $\supset$. Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ continue telle que $\forall t < 0, \ f(t) = 0$. Puisque f est continue en 0, on peut écrire $f(0) = \lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \underbrace{f(t)}_{=0} = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} 0 = 0$. Le même argument fonctionnerait si l'on avait supposé f nulle sur $\mathbf{R}_+^*$ au lieu de $\mathbf{R}_-^*$.

Montrons l'inclusion $\subset$. Soit $f \in C^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ nulle en 0. En définissant $\alpha : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{c} f(t) \text{ si } t \geq 0 \\ 0 \text{ si } t \leq 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$ et $\beta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{c} 0 \text{ si } t \geq 0 \\ f(t) \text{ si } t \leq 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$, la nullité de f en 0 assure la continuité de α et β en 0 et la continuité de f (et 0) assure la continuité de α et β sur $\mathbf{R}^*$. Montrons enfin $f = \alpha + \beta$. Soit $t \in \mathbf{R}$. Si $t \leq 0$, on a $[\alpha + \beta](t) = \alpha(t) + \beta(t) = 0 + f(t) = f(t)$ et, si $t \geq 0$, on a $[\alpha + \beta](t) = \alpha(t) + \beta(t) = f(t) + 0 = f(t)$; dans tout les cas, les fonctions $\alpha + \beta$ et f coïncident en t.

Il reste à montrer que la somme est directe. Soit f dans l'intersection, *i. e.* telle que $f \in C^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ et $\forall t < 0,\ f(t) = 0$ et $\forall t > 0,\ f(t) = 0$. Alors f est nulle sur $\mathbf{R}^*$, donc sur tout $\mathbf{R}$ par continuité, *c. q. f. d.*.

7. Soient V un espace vectoriel et E et F deux sous-espaces vectoriels de V.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que $E \subset F$. Alors $E \cup F = F$ est un sous-espace vectoriel de V.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que $E \cup F$ est un sous-espace vectoriel. Supposons par l'absurde que $E \not\subset F$ et que $F \not\subset E$. On peut alors considérer deux vecteurs $e \in E \backslash F$ et $f \in F \backslash E$. Ces deux derniers vecteurs restant dans le sous-espace vectoriel $E \cup F$, leur somme $e + f$ reste dans $E \cup F$: si elle appartient à E, alors $f = \underbrace{(e + f)}_{\in E} - e$ appartient à E, ce qui est impossbible (de même, si $e + f \in E$, alors $e = (e + f) - f \in F$ est contradictoire).

Remarque. Nous n'avons utilisé dans la démonstration précédente que la structure *additive* de V, aucunement la l. c. e.. En effet, cet exercice se généralise directement aux groupes en remplaçant "espace vectoriel" par "groupe" et "sous-espaces vectoriels" par "sous-groupes".