Espaces vectoriels
(T. G. 14)

1. *Est-ce que le complémentaire d'un s.-e. v. peut être un s.-e. v. ?*
2. *Est-ce que, pour une partie d'un e. v., être stable par l'homothétie de rapport nul revient à contenir le vecteur nul ?*
3. *Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels :*
   (a) *(dans $\mathbf{K}^3$) l'ensemble des triplets (a,b,c) tels que $18a+42c=b$;*
   (b) *(dans $\mathbf{K}^3$) l'ensemble des triplets (x,y,z) tels que $x=7z$;*
   (c) *(dans $\mathbf{K}^3$) l'ensemble des triplets (u,v,w) tels que $u+1=4v+w$;*
   (d) *(dans $\mathbf{K}^{\mathbf{R}}$) l'ensemble des fonctions constantes ;*
   (e) *(dans $\mathbf{K}^{\mathbf{R}}$) l'ensemble des fonctions positives ;*
   (f) *(dans $\mathbf{K}^{\mathbf{R}}$) l'ensemble des fonctions paires ;*
   (g) *(dans $\mathbf{K}^{\mathbf{R}}$) l'ensemble des fonctions impaires ;*
   (h) *(dans $\mathbf{K}^{\mathbf{R}}$) l'ensemble des fonctions valant 18 en 42 ;*
   (i) *(dans $\mathbf{K}^{\mathbf{R}}$) l'ensemble des fonctions de la forme $t\mapsto at^2+bt+c$ où (a,b,c) parcourt $\mathbf{R}^3$;*
   (j) *(dans $C^\infty(\mathbf{R},\mathbf{R})$) l'ensemble des fonctions f telles que $f(18)=f'(42)$;*
   (k) *(dans $C^0(\mathbf{R},\mathbf{R})$) l'ensemble des fonctions f telles que $\int_0^1 tf(t)\,dt=0$;*
   (l) *(dans $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$) l'ensemble des suites bornées ;*
   (m) *(dans $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$) l'ensemble des suites positives ;*
   (n) *(dans $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$) l'ensemble des suites convergentes ;*
   (o) *(dans $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$) l'ensemble des suites divergentes ;*
   (p) *(dans $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$) l'ensemble des suites tendant vers 18 ;*
   (q) *(dans $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$) l'ensemble des suites tendant vers 0 ;*
   (r) *(dans $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$) l'ensemble des suites tendant vers ∞ ;*
   (s) *(dans $\mathbf{C}$) les parties $\mathbf{R}+i\sqrt{5}\mathbf{Q}$ et $\mathbf{Q}+\sqrt{2}\mathbf{Q}$.*
4. *Est-ce que trois s.-e. v. sont en somme directe ssi leur intersection est nulle ? ssi ils sont deux à deux d'intersection nulle ?*
5. *Est-ce que $\oplus$ est une loi de composition interne ? Donner sens à et montrer son associativité.*
6. *Montrer les décompositions suivantes en supplémentaires (cela suppose de montrer que les parties considérées sont des s.-e. v.) :*
   (a) $\mathbf{C}=\mathbf{R}\oplus i\mathbf{R}$.
   (b) $\{f:\mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{R}\ ;\ f \text{ deux fois dérivable et } f''=f\}=\mathbf{R}\cos\oplus\mathbf{R}\sin$;
   (c) $\mathbf{R}^{42}=\mathbf{R}^{42}\oplus\{0\}$;
   (d) $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}=\{f:\mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{R}\ ;\ f(42)=0\}\oplus\{f:\mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{R}\ ;\ f \text{ constante}\}$;
   (e) $C^0(\mathbf{R},\mathbf{R})=\left\{f:\mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{R}\ ;\ f \text{ continue et } \int_0^2 f=0\right\}\oplus\{f:\mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{R}\ ;\ f \text{ constante}\}$;
   (f) $$C^0(\mathbf{R},\mathbf{R})=\begin{array}{l}\left\{f:\mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{R}\ ;\ \begin{array}{c}f \text{ continue et}\\ \forall t<0,\ f(t)=0\end{array}\right\}\oplus\{f:\mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{R}\ ;\ f \text{ constante}\}\\ \qquad\oplus\left\{f:\mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{R}\ ;\ \begin{array}{c}f \text{ continue et}\\ \forall t>0,\ f(t)=0\end{array}\right\}\end{array}.$$
7. (plus dur) *Dans un e. v., montrer que l'union de deux s.-e. v. est un s.-e. v. ssi l'un est inclus dans l'autre.*