Ensembles de nombres

(T. G. 13)

Solution proposée.

1. On applique l'algorithme vu dans un T. G. précédent, ce qui donne $18! = 2^{16}3^8 5^3 7^2 11 \cdot 13 \cdot 17$.

2. Le nombre de 0 est le nombre de facteurs 10 dans le produit $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot 42$. Puisqu'un 10 est le produit d'un 2 par un 5 et puisqu'il y moins de multiples de 5 que de 2 dans $[1, 42]$, la réponse est le nombre de facteurs 5 dans 42!. Or ces derniers apparaissent chacun comme diviseurs de $5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40$; vu que 25 compte double (et que c'est le seul), on trouve $1+1+1+1+2+1+1+1$ facteurs 5 dans 42!, lequel finit par conséquent par neuf 0.

3. Notons i la fonction considérée. Soit $d \in \mathcal{D}$. Alors l'égalité $n = d\frac{n}{d}$ montre que d et $\frac{n}{d}$ sont tous deux divieurs de n, ce qui montre que i est une application. Par ailleurs, on a $i\left(i\left(d\right)\right) = \frac{n}{\frac{n}{d}} = d$, ce qui montre que $i \circ i = \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$, d'où la conclusion.

4. Notons $\alpha := \max A$ et $\beta := \max B$. Soit $(a, b) \in A \times B$: on a $a \leq \alpha$ et $b \leq \beta$, d'où (en additionnant) $a + b \leq \alpha + \beta$, ce qui montre que $A + B$ est majorée (par $\alpha + \beta$). Par ailleurs, puisque $(\alpha, \beta) \in A \times B$, le majorant $\alpha + \beta$ appartient à $A + B$ et en est par conséquent un maximum, *c. q. f. d.* .

5. Notons $\alpha := \inf A$ et $\beta := \sup B$. Soit $E > 0$. Par définition de α et β, il y a un $(a, b) \in A \times B$ tel que $\left\{\begin{array}{l} \alpha \leq a < \alpha + E \\ \beta \leq b < \beta + E \end{array}\right.$, d'où (en multipliant (on peut car tout est positif)) $\alpha\beta \leq ab \leq \alpha\beta + E\left(\alpha + \beta + E\right)$. Pour conclure, il suffirait de majorer (à droite) par $\alpha\beta + E$; or cela est faux en général si α et β sont très grand devant E. Par conséquent, on remplace dans les comparaisons utilisées le ε (du critère du cours) non pas par E mais par $\frac{E}{N}$ avec N un entier à choisir judicieusement : on obtient alors $ab \leq E\frac{\alpha+\beta+\frac{E}{N}}{N}$, qui sera plus petit que E ssi $\frac{\alpha+\beta+\frac{E}{N}}{N} \leq 1$, *i. e.* ssi $\alpha + \beta + \frac{E}{N} \leq N$, ce qui peut être réalisé en prenant $\frac{E}{N} \leq 1$ et $N \geq \alpha + \beta + 1$, par exemple si $N = \lfloor E \rfloor + \lfloor \alpha + \beta + 1 \rfloor$.

6. Soit A une partie de $\mathbf{R}$ non vide minorée. Soit m un minorant de A. La partie $-A$ est alors non vide (elle contient l'opposé de n'importe quel élément de A) et majorée par $-m$, donc admet un supremum – appelelons-le s. Montrons que $-s$ est l'infimum de A.

   Soit $\varepsilon > 0$: il y a un élément $b \in -A$ tel que $s - \varepsilon < b \leq s$, mettons $b = -a$ pour un certain $a \in A$, d'où (en multipliant par -1) $-s \leq a < -s + \varepsilon$, ce qui conclut.

7. Supposons par l'absurde que $\forall n \in \mathbf{Z},\ n\varepsilon \leq A$. La partie $P := \{n\varepsilon\ ;\ n \in \mathbf{Z}\}$ de $\mathbf{R}$ est alors majorée (par A), clairement non vide, donc admet un supremum s. D'après le critère du cours, on peut trouver un élément $p \in P$ tel que $s - \varepsilon < p \leq s$; en écrivant $p = n\varepsilon$ pour un certain entier n, la comparaison de gauche se réécrit alors $(n+1)\,\varepsilon > s$; or s majore P, donc en particulier $(n+1)\,\varepsilon$, ce qui contredit la comparaison précédente.

8. Puisque $\infty + (-\infty)$ et $0 \times \infty$ ne font pas sens, ni l'addition ni la multiplication sur $\overline{\mathbf{R}}$ n'est une loi de composition interne.

9. Considérer $]a, a[$ pour n'importe quel $a \in \overline{\mathbf{R}}$ (et s'amuser à montrer que ce sont les seuls candidats possibles).

10.

$- \Rsh$	$-\infty$	réel	∞
$-\infty$	$\spadesuit$	$-\infty$	$-\infty$
réel	∞		$-\infty$
∞	∞	∞	$\spadesuit$

$\div \Rsh$	$-\infty$	réel < 0	0	réel > 0	∞
$-\infty$	$\spadesuit$	∞	$\spadesuit$	$-\infty$	$\spadesuit$
réel < 0	0		$\spadesuit$		0
0	0	0	$\spadesuit$	0	0
réel > 0	0		$\spadesuit$		0
∞	$\spadesuit$	$-\infty$	$\spadesuit$	∞	$\spadesuit$

11. Soit $A \subset \overline{\mathbf{R}}$. Montrons que A admet un supremum (la démonstration sera exactement la même pour l'infimum).

    Si A est non vide et majorée par un réel, alors on a terminé d'après l'axiome de complétude.

    Sinon, alors A est vide ou aucun réel ne majore A. Dans le premier cas ($A = \emptyset$), l'ensemble des majorants de A est tout $\overline{\mathbf{R}}$, lequel admet un plus petit élément $-\infty$. Dans le second cas, aucun réel ne peut majorer A, donc le seul élément de $\overline{\mathbf{R}}$ à majorer A est ∞ ; l'ensemble des majorants de A est ainsi le singleton $\{\infty\}$ qui admet un plus petit élément ∞.