Ensemble de nombres

(T. G. 13)

1. *Décomposer* $18!$ *en facteurs premiers.*
2. *Par combien de zéros finit* $42!$ *?*
3. *Soit* $n \in \mathbf{Z}$. *En notant* $\mathcal{D}$ *l'ensemble des diviseurs de* n, *montrer que la fonction* $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \longrightarrow & \mathcal{D} \\ d & \longmapsto & \frac{n}{d} \end{array} \right.$ *est une application bijective de réciproque elle-même.*
4. *Soient* A *et* B *deux parties de* $\mathbf{R}$ *qui admettent chacun un maximum. Donner sens à et montrer l'égalité* $\max(A+B) = \max A + \max B$.
5. *Soient* A *et* B *deux parties de* $\mathbf{R}_+$ *Donner sens à et montrer l'égalité* $\inf(A \cdot B) = (\inf A) \cdot (\inf B)$.
6. *On ne suppose pas connu l'axiome de complétude des réels. Montrer que, si toute partie non vide majorée admet un supremum, alors toute partie non vide minorée admet un infimum.*
7. *Soient* A *et* ε *deux réel strictement positifs. Montrer qu'il y a un entier* n *tel que* $n\varepsilon > A$. (hint : raisonner par l'absurde et utiliser l'axiome de complétude).
8. *L'addition et la multiplication de* $\overline{\mathbf{R}}$ *sont-elles des lois de composition interne ?*
9. *Donner un intervalle vide de* $\overline{\mathbf{R}}$ *dont les supremum et infimum sont égaux.*
10. *Dresser les tables de la soustraction et de la division dans* $\overline{\mathbf{R}}$.
11. *Montrer que toute partie de* $\overline{\mathbf{R}}$ *admet un supremum et un infimum.*