Calcul

(T. G. 12)

Solution proposée.

1. Notons $S := \sum_{u=0}^{n} u^2$. On écrit comme dans le cours

$$\begin{aligned}
\sum_{u=1}^{n+1} u^3 &= \sum_{u=0}^{n} (u+1)^3 = \sum_{u=0}^{n} u^3 + 3\sum_{u=0}^{n} u^2 + 3\sum_{u=0}^{n} u + \sum_{u=0}^{n} 1^3, \text{ d'où} \\
(n+1)^3 &= 3S + 3\frac{n(n+1)}{2} + (n+1). \text{ Il en résulte} \\
6S &= (n+1)\left(2(n+1)^2 - 3n - 2\right) \\
&= (n+1)\left(2n^2 + n\right) \\
&= (n+1)(2n+1)n, \text{ d'où} \\
S &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.
\end{aligned}$$

Pour tout naturel p, notons E_p l'énoncé $\sum_{k=1}^{p} k^2 = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6}$. L'énoncé E_0 équivaut à $0 = 0$ et est donc vrai. Soit $a \geq 1$ un entier tel que E_{a-1}. On a alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{a} k^2 &= \left(\sum_{k=1}^{a-1} k^2\right) + a^2 \\
&= \frac{a(a-1)(2a-1)}{6} + a^2 \qquad \text{d'après } E_{a-1} \\
&= \frac{a}{6}\left(2a^2 - 3a + 1 + 6a\right) \\
&= \frac{a}{6}\left(2a^2 + 3a + 1\right) \\
&= \frac{a}{6}(a+1)(2a+1), \qquad \text{d'où } E_a.
\end{aligned}$$

2. Notons $S := \sum_{u=0}^{n} u^3$. On écrit comme dans le cours

$$\begin{aligned}
\sum_{u=1}^{n+1} u^4 &= \sum_{u=0}^{n} (u+1)^4 = \sum_{u=0}^{n} u^4 + 4\sum_{u=0}^{n} u^3 + 6\sum_{u=0}^{n} u^2 + 4\sum_{u=0}^{n} u + \sum_{u=0}^{n} 1^3, \text{ d'où} \\
(n+1)^4 &= 4S + 6\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 4\frac{n(n+1)}{2} + (n+1). \text{ Il en résulte} \\
4S &= (n+1)\left((n+1)^3 - n(2n+1) - 2n - 1\right) \\
&= (n+1)\left((n+1)^3 - (2n+1)(n+1)\right) \\
&= (n+1)^2\left(n^2 + 2n + 1 - 2n - 1\right) \\
&= (n+1)^2 n^2, \text{ d'où} \\
S &= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.
\end{aligned}$$

On peut aussi écrire (comme dans le cours)

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{u=0}^{n} u^3 \\
&= \sum_{v=0}^{n} (n-v)^3 \\
&= \sum_{v=0}^{n} \left(n^3 - 3n^2 v + 3nv^2 - v^3\right) \\
&= n^3 \sum_{v=0}^{n} 1 - 3n^2 \sum_{v=0}^{n} v + 3n \sum_{v=0}^{n} v^2 - \sum_{v=0}^{n} v^3 \\
&= n^3 (n+1) - 3n^2 \frac{n(n+1)}{2} + 3n \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - S \\
&= \frac{n(n+1)}{2} \left(2n^2 - 3n^2 + n(2n+1)\right), \text{ d'où} \\
2S &= \frac{n(n+1)}{2} \left(n^2 + n\right) \text{ et } S = \left(\frac{n(n+1)}{4}\right)^2.
\end{aligned}$$

Pour tout naturel p, notons E_p l'énoncé $\sum_{k=1}^{p} k^3 = \left(\frac{p(p+1)}{2}\right)^2$. L'énoncé E_0 équivaut à $0 = 0$ et est donc vrai. Soit $a \geq 1$ un entier tel que E_{a-1}. On a alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{a} k^3 &= \left(\sum_{k=1}^{a-1} k^3\right) + a^3 \\
&= \frac{a^2 (a-1)^2}{4} + a^3 \qquad \text{d'après } E_{a-1} \\
&= \frac{a^2}{4} \left(a^2 - 2a + 1 + 4a\right) \\
&= \frac{a^2}{4} \left(a^2 + 2a + 1\right) \\
&= \frac{a^2}{4} (a+1)^2, \qquad \text{d'où } E_a.
\end{aligned}$$

3. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{N} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) &= \sum_{n=2}^{N} \ln\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right) \\
&= \sum_{n=2}^{N} \ln\left(\frac{n-1}{n}\frac{n+1}{n}\right) \\
&= \sum_{n=2}^{N} \ln(n-1) + \sum_{n=2}^{N} \ln(n+1) - 2\sum_{n=2}^{N} \ln n \\
&= \sum_{p=1}^{N-1} \ln p + \sum_{p=3}^{N+1} \ln p - 2\sum_{p=2}^{N} \ln p \\
&= \left(\ln 1 + \ln 2 + \sum_{p=3}^{N-1} \ln p\right) + \left(\ln N + \ln(N+1) + \sum_{p=3}^{N-1} \ln p\right) - 2\left(\ln 2 + \ln N + \sum_{p=3}^{N-1} \ln p\right) \\
&= -\ln 2 + \ln(N+1) - \ln N \\
&= \ln \frac{N+1}{2N}.
\end{aligned}$$

4. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{p=0}^{K} D_p(c) &= \sum_{p=0}^{K} \frac{\sin\left[\left(p+\frac{1}{2}\right)c\right]}{\sin\frac{c}{2}} = \frac{1}{\sin^2\frac{c}{2}} \sum_{p=0}^{K} \sin\left[\left(p+\frac{1}{2}\right)c\right] \sin\frac{c}{2} \\
&= \frac{1}{\sin^2\frac{c}{2}} \sum_{p=0}^{K} -\frac{1}{2}\left(\cos\left[(p+1)c\right]-\cos(pc)\right) = \frac{1}{\sin^2\frac{c}{2}}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\cos\left[(K+1)c\right]-1\right) \\
&= \frac{1}{\sin^2\frac{c}{2}} \sin^2\left(\frac{K+1}{2}c\right) = \frac{\sin^2\left(\frac{K+1}{2}c\right)}{\sin^2\frac{c}{2}}.
\end{aligned}$$

5. Soient a et b deux complexes. Pour tout $t \in \mathbf{N}$, notons B_t l'énoncé $(a+b)^t = \sum_{k=0}^{t} \binom{t}{k} a^k b^{t-k}$.
L'énoncé B_0 équivaut à $(a+b)^0 = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^k b^{0-k}$, *i. e.* à $1 = \binom{0}{0} a^0 b^{-0}$, ce qui est vrai.
Soit $m \in \mathbf{N}$ tel que B_m. On a alors

$$\begin{aligned}
(a+b)^{m+1} &= (a+b)(a+b)^m \\
&= (a+b)\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}a^k b^{m-k} \quad \text{d'après } B_m \\
&= \sum_{k=0}^{m}\left[\binom{m}{k}a^{k+1}b^{m-k} + \binom{m}{k}a^k b^{m+1-k}\right] \quad \text{en développant} \\
&= \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}a^{k+1}b^{m-k} + \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}a^k b^{m+1-k} \quad \text{en réassociant les termes} \\
&= \sum_{\ell=1}^{m+1}\binom{m}{\ell-1}a^{\ell}b^{m-(\ell-1)} + \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}a^k b^{m+1-k} \quad \begin{array}{c}\text{(on a reparamétré la première somme}\\ \text{en remplaçant } k+1 \text{ par } \ell)\end{array} \\
&= \sum_{\ell=0}^{m+1}\binom{m}{\ell-1}a^{\ell}b^{m-(\ell-1)} + \sum_{k=0}^{m+1}\binom{m}{k}a^k b^{m+1-k} \quad \text{car } \binom{m}{-1} = 0 = \binom{m}{m+1} \\
&= \sum_{k=0}^{m+1}\binom{m}{k-1}a^{k}b^{m+1-k} + \sum_{k=0}^{m+1}\binom{m}{k}a^k b^{m+1-k} \quad \begin{array}{c}\text{(on a changé de symbole muet}\\ \text{dans la première somme)}\end{array} \\
&= \sum_{k=0}^{m+1}\left(\binom{m}{k-1}+\binom{m}{k}\right)a^k b^{m+1-k} \quad \text{en réassociant les termes} \\
&= \sum_{k=0}^{m+1}\binom{m+1}{k}a^k b^{(m+1)-k}, \text{ d'où } B_{m+1}.
\end{aligned}$$

6. Suivons l'indication. Soient a, b, c, d des réels et n un entier. On a

$$\frac{an+b}{(n+1)^2} + \frac{cn+d}{(n+2)^2} = \frac{(an+b)\left(n^2+4n+4\right) + (cn+d)\left(n^2+2n+1\right)}{(n+1)^2(n+2)^2};$$

le dénominateur vaut $(a-c)n^3 + (4a+b+2c+d)n^2 + (4a+4b+c+2d)n + (4b+1)$ que l'on aimerait égal à $2n+3$, ce qui sera le cas si $\left\{\begin{array}{c} a-c=0 \\ 4a+b+2c+d=0 \\ 4a+4b+c+2d=2 \\ 4b+1=3 \end{array}\right.$, ce qui équivaut à $\left\{\begin{array}{c} c=a \\ 6a+d=-1 \\ 5a+2d=-2 \\ b=1 \end{array}\right.$, ou encore à $(a,b,c,d) = (0,1,0,-1)$.

On en déduit les égalités

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{2k+3}{(k+1)^2(k+2)^2} = \sum_{k=0}^{N}\left(\frac{1}{(k+1)^2} - \frac{1}{(k+2)^2}\right) = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{(N+2)^2}.$$

7. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}u_{n-k} &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\sum_{i=0}^{n-k}\binom{n-k}{i}v_i \\
&= \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{n-k}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{n-k}{i}v_i \\
&= \sum_{\substack{0\leq k\leq n \\ 0\leq i\leq n-k}}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{n-k}{i}v_i \\
&= \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-i}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{n-k}{i}v_i \\
&= \sum_{i=0}^{n}v_i\sum_{k=0}^{n-i}(-1)^k\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\frac{(n-k)!}{i!\,(n-k-i)!}.
\end{aligned}$$

Comme on veut trouver v_n, il serait souhaitable que la somme $\sum_k$ à $i\neq n$ fixé soit nulle. On a du $(-1)^k$ et des choses qui ressemblent à du binomial, donc cela doit probablement se faire à coup de $\sum_{k=0}^{n-i}(-1)^k\binom{n-i}{k}=0$. On oriente les calculs dans cette voie :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}u_{n-k} &= \sum_{i=0}^{n}v_i\sum_{k=0}^{n-i}(-1)^k\frac{n!}{(n-i)!i!}\frac{(n-i)!}{k!\,(n-k-i)!}. \\
&= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}v_i\sum_{k=0}^{n-i}(-1)^k\binom{n-i}{k} \\
&= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}v_i\,(1-1)^{n-i} \\
&= \binom{n}{n}v_n \\
&= v_n.
\end{aligned}$$

8. Soient x et y deux réels : en discutant selon que $x\leq y$ ou $x\geq y$, on voit que $\min\{x,y\}\max\{x,y\}=xy$. On en déduit

$$\sum_{\substack{1\leq i\leq a \\ 1\leq j\leq a}}\min\{i,j\}\max\{i,j\}=\sum_{\substack{1\leq i\leq a \\ 1\leq j\leq a}}ij=\sum_{i=1}^{a}i\sum_{j=1}^{a}j=\left(\sum_{i=1}^{a}i\right)^2=\left(\frac{a\,(a+1)}{2}\right)^2.$$

En partitionnant le dommaine de sommation $\{1,2,...,a\}=\coprod_{m=1}^{a}\underbrace{\{(i,j)\ ;\ \min\{i,j\}=m\}}_{=:E_m}$ selon des équerres [dessin], on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{1\le i\le a\\1\le j\le a}}\min\{i,j\} &= \sum_{m=1}^{a}\sum_{(i,j)\in E_m}\underbrace{\min\{i,j\}}_{=m}\\
&= \sum_{m=1}^{a} m\sum_{(i,j)\in E_m}1\\
&= \sum_{m=1}^{a} m\,\mathrm{Card}\,E_m\\
&= \sum_{m=1}^{a} m\,(2m-1)\\
&= 2\sum_{m=1}^{a} m^2-\sum_{m=1}^{a} m\\
&= 2\frac{a\,(a+1)\,(2a+1)}{6}-\frac{a\,(a+1)}{2}\\
&= \frac{a\,(a+1)}{6}\,(2\,(2a+1)-3)\\
&= \frac{a\,(a+1)\,(4a-1)}{6}.\end{aligned}$$

Sanity check : si $a=3$, la somme vaut

$$1+2+2+2+3+3+3+3+3=22$$

et on a par ailleurs $\frac{3(3+1)(4\cdot 3-1)}{6}=2\cdot 11=22$.

9. Suivant l'indication, il vient

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{0\le i\le n\\0\le j\le n}}\frac{a_ia_j}{i+j+1} &= \sum_{\substack{0\le i\le n\\0\le j\le n}} a_ia_j\int_0^1 t^{i+j}\,dt\\
&= \int_0^1\sum_{\substack{0\le i\le n\\0\le j\le n}} a_it^ia_jt^j\,dt\\
&= \int_0^1\left(\sum_{i=0}^{n}a_it^i\right)\left(\sum_{j=0}^{n}a_jt^j\right)dt\\
&= \int_0^1\underbrace{\left(\sum_{i=0}^{n}a_it^i\right)^2}_{\ge 0}dt\\
&\ge 0.\end{aligned}$$

10. Suivant l'indication, il vient

$$\begin{aligned}
\left(\prod_{d\in\mathcal{D}} d\right)^2 &= \left(\prod_{d\in\mathcal{D}} d\right)\left(\prod_{d\in\mathcal{D}} d\right) && \text{(les parenthèses sont ici indispensables car } \times \text{ ne se distribue pas sur } \times\text{)}\\
&= \left(\prod_{d\in\mathcal{D}} d\right)\left(\prod_{\delta\in\mathcal{D}} \frac{n}{\delta}\right) && \text{en remplaçant } d \text{ par } \frac{n}{\delta}\\
&= \left(\prod_{\delta\in\mathcal{D}} \delta\right)\left(\prod_{\delta\in\mathcal{D}} \frac{n}{\delta}\right)\\
&= \prod_{\delta\in\mathcal{D}} \delta\frac{n}{\delta} && \text{en réassociant les facteurs}\\
&= \prod_{\delta\in\mathcal{D}} n\\
&= n^{\operatorname{Card}\mathcal{D}}, && \text{d'où la formule cherchée en appliquant } \sqrt{\cdot} \text{ puis } \sqrt[\operatorname{Card}\mathcal{D}]{\cdot}2.
\end{aligned}$$

(a) Montrons que $*$ est commutative. Soient u et v deux polynômes. On a pour tout entier n naturel

$[u*v](n) = \sum_{p=0}^{n} u_p v_{n-p} = \sum_{q=0}^{n} u_{n-q} v_q = \sum_{q=0}^{n} v_q u_{n-q} = [v*u](n)$, ce qui montre l'égalité $u*v = v*u$.

(b) Montrons que $*$ est bien définie. Il s'agit de montrer que, pour tous polynômes P et Q, la suite $P*Q$ est nulle à partir d'un certain rang.

Soient u et v deux suites chacune nulle à partir d'un certain rang. Soient U et V deux entiers tels que $\forall n\in\mathbf{N}$, $\begin{cases} n\geq U \Longrightarrow u_n = 0\\ n\geq V \Longrightarrow v_n = 0\end{cases}$. Montrons que $u*v$ est nulle à partir du rang $U+V$. Soit $n \geq U+V$ un entier. Dans la somme $[u*v](n) = \sum_{p=0}^{n} u_p v_{n-p}$, les termes pour $p \geq U$ sont nuls (car alors $u_p = 0$), donc $[u*v](n) = \sum_{p=0}^{U-1} u_p v_{n-p} = \sum_{q=n-(U-1)}^{n} u_{n-q} v_n$ (réindexer $p \leftarrow n-q$) ; de même, les termes pour $q \geq V$ sont nuls (car alors $v_q = 0$), donc $[u*v](n) = \sum_{n-U<q<V} u_{n-q} v_n$; or cette dernière somme est vide car $n-U \geq V$, *c. q. f. d.*.

(c) Montrons que $*$ est intègre.

Soient u et v deux polynômes tels que $u*v = 0$. Supposons que $u \neq 0$. C'est dire que la partie $\{n\in\mathbf{N}\ ;\ u_n \neq 0\}$ est non vide : cette dernière admet donc un plus petit élément p. Supposons alors par l'absurde que v également est non nulle et considérons le plus petit entier q tel que $v_q \neq 0$. On a alors

$$\begin{aligned}
0 &= [u*v](p+q) && \text{(car } u*v=0\text{)}\\
&= \sum_{i=0}^{p+q} u_i v_{(p+q)-i}\\
&= \sum_{i=p}^{p+q} u_i v_{p+q-i} && \text{(car } u_i = 0 \text{ pour } i<p\text{)}\\
&= \sum_{j=0}^{q} u_{p+q-j} v_j && \text{(réindexer } i \leftarrow p+q-j\text{)}\\
&= \sum_{j=q}^{q} u_{p+q-j} v_j && \text{(car } v_j = 0 \text{ pour } j<q\text{)}\\
&= \underbrace{u_p}_{\neq 0}\ \underbrace{v_q}_{\neq 0}\\
&\neq 0, \text{ ce qui est absurde.}
\end{aligned}$$

(d) Montrons que $*$ est associative.

Soient u, v et w trois polynômes. Soit n un entier naturel. On a d'une part

$$[(u*v)*w](n) = \sum_{p=0}^{n} [u*v](p)\ w_{n-p} = \sum_{p=0}^{n}\left(\sum_{q=0}^{p} u_q v_{p-q}\right) w_{n-p} = \sum_{0\leq q\leq p\leq n} u_q v_{p-q} w_{n-p},$$

d'autre part

$$
\begin{aligned}
\left[u*(v*w)\right](n) &= \left[(v*w)*u\right](n) \qquad \text{(car $*$ est commutative)} \\
&= \sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{p} v_q w_{p-q} u_{n-p} \qquad \begin{array}{c}\text{(reprendre le calcul ci-dessus en}\\ \text{remplaçant l'ancien (u,v,w)}\\ \text{par le nouveau (v,w,u))}\end{array} \\
&= \sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{p} u_{n-p} v_q w_{p-q} \\
&= \sum_{Q=0}^{n}\sum_{q=0}^{n-Q} u_Q v_q w_{(n-Q)-q} \qquad \text{(en réindexant $p \leftarrow n-Q$)} \\
&= \sum_{Q=0}^{n}\sum_{P=Q}^{n} u_Q v_{P-Q} w_{(n-Q)-(P-Q)} \qquad \text{(en réindexant $q \leftarrow P-Q$)} \\
&= \sum_{0\le Q\le P\le n} u_Q v_{P-Q} w_{n-P},
\end{aligned}
$$

ce qui montre que les suites $(u*v)*w$ et $u*(v*w)$ ont même valeur en n. Ceci tenant pour tout $n \in \mathbf{N}$, ces deux suites sont égales, ce qui conclut.

(e) Montrons que le polynôme $I := (1,0,0,0,0,...)$ est neutre pour $*$.
Soit u un polynôme. On a alors, pour tout entier $n \geq 0$,

$$
\left[u*I\right](n) = \sum_{p=0}^{n} u_p I_{n-p} = \sum_{p=0}^{n} u_p \delta_{n-p}^{0} = \sum_{p=0}^{n} \delta_n^p u_p = u_n, \text{ d'où l'égalité } u*I = I.
$$

11. On a

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=2}^{n} (i-2)!\binom{n}{i}\frac{n^{n-i}}{n!} &= \sum_{i=2}^{n} \frac{(i-2)!n!}{i!\,(n-i)!}\frac{n^{n-i}}{n!} \\
&= \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i\,(i-1)}\frac{n^{n-i}}{(n-i)!} \\
&= \sum_{i=2}^{n} \left(\frac{1}{i-1}-\frac{1}{i}\right)\frac{n^{n-i}}{(n-i)!} \\
&= \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i-1}\frac{n^{n-i}}{(n-i)!} - \sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i}\frac{n^{n-i}}{(n-i)!} \\
&= \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j}\frac{n^{n-(j+1)}}{(n-(j+1))!} - \sum_{j=2}^{n}\frac{1}{j}\frac{n^{n-j}}{(n-j)!} \\
&= \left(\frac{n^{n-2}}{(n-2)!} + \sum_{j=2}^{n-1}\frac{1}{j}\frac{n^{n-j-1}}{(n-j-1)!}\right) - \left(\frac{1}{n} + \sum_{j=2}^{n-1}\frac{1}{j}\frac{n^{n-j}}{(n-j)!}\right) \\
&= \frac{n^{n-2}}{(n-2)!} - \frac{1}{n} + \sum_{j=2}^{n-1}\frac{n^{n-j-1}}{(n-j)!}\frac{1}{j}\left((n-j)-n\right) \\
&= \frac{n\,(n-1)\,n^{n-2}}{(n-2)!\,(n-1)\,n} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n}\sum_{j=2}^{n-1}\frac{n^{n-j}}{(n-j)!} \\
&= \frac{n^n}{n!}\frac{n-1}{n} - \frac{1}{n}\left(\frac{n^0}{0!} + \left(\sum_{i=1}^{n-2}\frac{n^i}{i!}\right) + \frac{n^{n-1}}{(n-1)!}\right) + \frac{1}{n}\frac{n^{n-1}}{(n-1)!} \\
&= \frac{n^n}{n!} - \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{n^i}{i!}.
\end{aligned}
$$