Calcul

(T. G. 12)

1. *Soit $n \in \mathbf{N}$. Calculer la somme $\sum_{u=1}^{n} u^2$ en réindexant par incrémentation. Retrouver le résultat par récurrence.*
2. *Soit $n \in \mathbf{N}$. Calculer la somme $\sum_{q=1}^{n} q^3$ en réindexant ou bien par incrémentation ou bien par complémentation. Retrouver le résultat par récurrence.*
3. *Soit $N \in \mathbf{N}$. Simplifier $\sum_{n=2}^{N} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.*
4. Soit c un complexe. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $D_n := \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)c\right)}{\sin \frac{c}{2}}$.

   Soit $K \in \mathbf{N}$. Simplifier $\sum_{p=0}^{K} D_p$ (hint : multiplier par $\sin \frac{x}{2}$ pour faire apparaître une somme télescopique).
5. *Montrer la formule du binôme par récurrence.*
6. *Soit $N \in \mathbf{N}$. Simplifier $\sum_{n=0}^{N} \frac{2n+3}{(n+1)^2(n+2)^2}$* (hint : chercher des réels a, b, c, d tels que $\frac{2n+3}{(n+1)^2(n+2)^2} = \frac{an+b}{(n+1)^2} + \frac{cn+d}{(n+2)^2}$).
7. *Soient (u_n) et (v_n) deux suites complexes telles que $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} v_i$. Montrer que*
$$\forall n \in \mathbf{N},\ v_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} u_{n-k}.$$
8. *Soit $a \in \mathbf{N}$. Calculer $\sum_{\substack{1 \le i \le a \\ 1 \le j \le a}} \min\{i, j\} \max\{i, j\}$ et $\sum_{\substack{1 \le i \le a \\ 1 \le j \le a}} \min\{i, j\}$.*
9. *Soient n un naturel et $a_0, a_1 ...., a_n$ des réels. Montrer que $\sum_{\substack{0 \le i \le n \\ 0 \le j \le n}} \frac{a_i a_j}{i+j+1} \ge 0$* (hint : écrire $\frac{1}{s+1} = \int_0^1 t^s dt$ puis tout factoriser dans l'intégrale).
10. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Pour tout entier a, on note $a \mid n$ (lire "a divise n") au lieu de $\exists k \in \mathbf{N},\ n = ak$. Posons $\mathcal{D} := \{d \in \mathbf{N}\ ;\ d \mid n\}$.

    Montrer que $\sqrt[\operatorname{Card} \mathcal{D}]{\prod_{d \in \mathcal{D}} d} = \sqrt{n}$ (hint : élever au carré et introduire la bijection $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \longrightarrow & \mathcal{D} \\ d & \mapsto & \frac{n}{d} \end{array} \right.$).
11. On note $\mathbf{C}^{(\mathbf{N})} := \left\{u \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}\ ;\ \exists N \in \mathbf{N},\ \forall n \ge N,\ u_n = 0\right\}$ l'ensemble des suites complexes nulles à partir d'un certain rang (appelées ***polynômes***). On définit pour tous polynômes u et v une suite $u * v$: $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{N} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ n & \longmapsto & \sum_{p+q=n}^{p \ge 0, q \ge 0} u_p v_q \end{array} \right.$.

    Montrer que $*$ est une loi de composition interne de $\mathbf{C}^{(\mathbf{N})}$, associative, commutative, intègre[1] qui possède un neutre.
12. *Soit $n \ge 2$ un entier. Montrer que*
$$\sum_{i=2}^{n} (i-2)! \binom{n}{i} \frac{n^{n-i}}{n!} = \frac{n^n}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-2} \frac{n^i}{i!}$$

    (hint : faire apparaître du $\frac{1}{i(i-1)} = \frac{1}{i-1} - \frac{1}{i}$).

[1] *comprendre : si le composé pour $*$ de deux polynômes est nul, alors l'un au moins de ces polynômes est nul*