Dénombrement

(T. G. 11)

1. *Soit E un ensemble fini. Dénombrer les couples $(A,B) \in \mathfrak{P}(E)^2$ tels que :*
   (a) $A \subset E$ *;*
   (b) $A = B$ *;*
   (c) $A \cap B = \emptyset$ *et* $A \cup B = E$ *;*
   (d) $A \subset B$ (hint : regrouper ces couples selon B) *;*
   (e) $A \subsetneq B$ *;*
   (f) $A \not\subset B$ *et* $B \not\subset A$ *;*
   (g) $A \cap B = \emptyset$ (hint : se ramener à la question (d)).
2. *Soient X et Y deux parties finies de $\mathbf{N}$. Dénombrer les applications strictement croissantes de X vers Y.*
3. *Soit M un magma associatif régulier fini. Montrer que M possède un neutre.* (hint : considérer l'application $x \mapsto mxm$ pour un certain $m \in M$).
4. Soient A et B deux ensembles finis.
   (a) *Si* $\operatorname{Card} A \leq \operatorname{Card} B$*, montrer que l'on peut injecter A dans B.*
   (b) *Si* $\operatorname{Card} A \geq \operatorname{Card} B$*, montrer que l'on peut surjecter A sur B à l'exception d'un cas pathologique que l'on précisera.*
   (c) *Si $A \neq \emptyset$, montrer que A^B ne peut s'injecter dans A lorsque B a au moins deux éléments (et si B n'a qu'un élément ?).*
5. Soit E un ensemble fini.
   (a) *Montrer que $\mathfrak{P}(E)$ ne peut s'injecter dans E.*
   (b) *Donner une condition nécessaire et suffisante simple pour pouvoir injecter $\mathfrak{S}_E$ dans $\mathfrak{P}(E)$.*
   (c) *On définit deux applications*

$$\chi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathfrak{P}(E) & \longrightarrow & \{0,1\}^E \\ P & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longmapsto & \{0,1\} \\ x & \longrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si } x \in P \\ 0 \text{ si } x \notin P \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right. \quad \text{et } \varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \{0,1\}^E & \longrightarrow & \mathfrak{P}(E) \\ f & \longmapsto & \{x \in E \; ; \; f(x) = 1\} \end{array} \right. .$$

   Montrer que χ et φ sont réciproques l'une de l'autre et en déduire le cardinal de $\mathfrak{P}(E)$.