Récurrence

(T. G. 10)

Solution proposée.

1. Pour tout entier naturel n, on note P_n l'égalité $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$. Montrons ce dernier par récurrence sur n.

L'égalité P_0 s'écrit $0=0^2$, ce qui est vrai. ($\bigstar$ la somme a l'air de se terminer à $2\cdot 0-1=-1$ mais, comme elle est formée de zéro termes, elle ne commence ni ni finit, c'est la ***somme vide***, égale par convention[1] à 0).

Soit $n\geq 0$ un entier tel que P_n. On a alors

$$\begin{aligned} 1+3+5+\cdots+(2(n+1)-1) &= [1+3+5+\cdots+(2n-1)]+(2n+1) \\ &= n^2+2n+1 \qquad \text{d'après } P_n \\ &= (n+1)^2\text{, d'où } P_{n+1}. \end{aligned}$$

2. Pour tout entier naturel n on note E_n la comparaison $u_n\geq n!$. Montrons cette dernière par récurrence sur n.

L'énoncé E_1 équivaut à $u_1\geq 1!$, *i. e.* à $1\geq 1$, ce qui est vrai.

Soit $n\in\mathbf{N}^*$ tel que $E_1,E_2,...,E_n$. Alors

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{n+1} &= u_1+u_2+\cdots+u_n \\ &\geq 1!+2!+\cdots+n! \\ &\geq n!\text{, d'où} \\ u_{n+1} &\geq n!\,(n+1)=(n+1)!\text{, ce qui montre } E_{n+1}. \end{aligned}$$

3. Pour tout entier naturel n, on note B_n la comparaison $(1+x)^n\geq 1+nx$. Montrons cette dernière par récurrence sur n.

On a les équivalences $B_0\iff(1+x)^0\geq 1+0x\iff 1\geq 1$, ce qui est vrai, d'où B_0.

Soit $n\in\mathbf{N}$ tel que B_n. On a alors

$$\begin{aligned} (1+x)^{n+1} &= \overbrace{(1+x)}^{\text{positif car } x\geq -1}\,(1+x)^n \\ &\geq (1+x)(1+nx) \qquad \text{d'après } B_n \\ &= 1+(n+1)\,x+\underbrace{nx^2}_{\geq 0 \text{ car } n\in\mathbf{N}} \\ &\geq 1+(n+1)\text{, d'où } B_{n+1}. \end{aligned}$$

4. Pour tout entier naturel n, on note F_n l'égalité $1!1+2!2+\cdots+n!n=(n+1)!-1$. Montrons cette dernière par récurrence sur n.

L'égalité F_0 équivaut à $0=(0+1)!-1$, ce qui est vrai.

Soit $n\in\mathbf{N}^*$ tel que F_{n-1}. On a alors

$$\begin{aligned} 1!1+2!2+\cdots+n!n &= [1!1+2!2+\cdots+(n-1)!\,(n-1)]+n!n \\ &= ((n-1)+1)!-1+n!n \qquad \text{d'après } F_{n-1} \\ &= n!\,(n+1)-1 \\ &= (n+1)!-1\text{, d'où } F_n. \end{aligned}$$

[1] C'est convention est plus que motivée : ajouter la somme vide, c'est ne rien ajouter, donc c'est ajouter un neutre pour l'addition, donc c'est ajouter zéro.

5. Pour tout entier $k \geq 1$, on note C_k l'énoncé

$$\forall (\lambda_1, ..., \lambda_k) \in [0,1]^k, \ (1-\lambda_1)(1-\lambda_2)\cdots(1-\lambda_k) \geq 1 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k).$$

Soit $\lambda \in [0,1]$. La comparaison à montrer équivaut à $(1-\lambda) \geq 1 - (\lambda)$, ce qui est vrai, d'où C_1.
Soit $k \geq 1$ tel que C_k. Soient $(u_0, u_1, ..., u_k) \in [0,1]^{k+1}$. On a alors

$$\begin{aligned} & \underbrace{(1-u_0)}_{\text{positif car } u_0 \in [0,1]} \quad (1-u_1)\cdots(1-u_k) \\ \geq \quad & (1-u_0)(1-(u_1+u_2+\cdots+u_k)) \qquad \text{d'après } C_n \\ = \quad & 1-(u_0+u_1+\cdots+u_k) + \underbrace{u_0(u_1+u_2+\cdots+u_k)}_{\geq 0 \text{ car tous les } u_i \text{ sont dans } [0,1]} \\ \geq \quad & 1-(u_0+u_1+\cdots+u_k), \text{ d'où } C_{k+1}. \end{aligned}$$

On a donc montré $\forall p \in \mathbf{N},\ C_p$, d'où l'on infère C_n.

6.

(a) Pour tout entier $n \geq 2$, on note A_n l'énoncé $D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$. Montrons ce dernier par récurrence sur n.

On a les équivalences $A_2 \iff D_2 = 2D_1 + (-1)^2 \iff 1 = 2 \cdot 0 + 1$, ce qui est vrai.
Soit $k \geq 2$ un entier tel que A_k. On a alors

$$\begin{aligned} D_{k+1} &= k(D_k + D_{k-1}) \\ &= kD_k + kD_{k-1} \\ &= kD_k + \left(D_k - (-1)^k\right) \text{ d'après } A_k \\ &= (k+1)D_k + (-1)^{k+1}, \text{ d'où } A_{k+1} \end{aligned}$$

(b) Pour tout entier $n \geq 2$, on note B_n l'énoncé $\frac{D_n}{n!} = \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}$.
Puisque $\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} = \frac{1}{1} - \frac{1}{1} = 0 = D_1$, on a B_1.
Soit $r \geq 2$ un entier tel que B_{r-1}. On a alors

$$\begin{aligned} \frac{D_r}{r!} &= \frac{rD_{r-1} + (-1)^r}{r!} \qquad \text{d'après } A_r \\ &= \frac{D_{r-1}}{(r-1)!} + \frac{(-1)^r}{r!} \\ &= \left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + \frac{(-1)^{r-1}}{(r-1)!}\right) + \frac{(-1)^r}{r!} \qquad \text{d'après } B_{r-1} \\ &= \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + \frac{(-1)^r}{r!}, \text{ d'où } B_r. \end{aligned}$$

7. Pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, on note P_n, Q_n et R_n les égalités respectives

$$\begin{aligned} F_1 + F_2 + \cdots + F_n &= F_{n+2} - 1, \\ F_1 + F_3 + F_5 + \cdots + F_{2n-1} &= F_{2n} - 1, \\ \text{et } F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1} &= (-1)^n. \end{aligned}$$

(a) Montrons P_n par récurrence sur n avec deux prédécesseurs.
L'égalité P_0 équivaut à $0 = F_{0+2} - 1$, *i. e.* à $1 = F_2$, ce qui est vrai.
On a les équivalences $P_1 \iff F_1 = F_{1+2} - 1 \iff \underbrace{1 + 1 = F_3}_{\text{vrai}}$, d'où P_1.

Soit $n \geq 2$ un entier tel que P_{n-2} et P_{n-1}. On a alors

$$\begin{aligned} F_1 + F_2 + \cdots + F_n &= (F_1 + F_2 + \cdots + F_{n-2}) + (F_{n-1} + F_n) \\ &= F_{(n-2)+2} - 1 + F_{n+1} \qquad \text{d'après } P_{n-2} \text{ et les hypothèses sur la suite } (F_k) \\ &= F_n + F_{n+1} - 1 \\ &= F_{n+2} - 1, \text{ d'où } P_{n-1} \end{aligned}$$

(Remarquer que l'on a montré pour tout naturel k l'implication $P_k \Longrightarrow P_{k+2}$ (pas besoin de P_{k+1}) ; cependant, il faut bien sûr initialiser en deux valeurs successives (sinon on rate un entier sur deux).)

(b) Montrons Q_n par récurrence (simple) sur n.
L'égalité Q_1 équivaut à $F_1 = F_{2\cdot 1}$, ce qui est vrai (puisque $F_1 = 1 = F_2$).
Soit $n \geq 1$ un entier tel que Q_n. On a alors

$$\begin{array}{rcl} F_1 + F_3 + F_5 + \cdots + F_{2(n+1)-1} & = & (F_1 + F_3 + F_5 + \cdots + F_{2n-1}) + F_{2n+1} \\ & = & F_{2n} + F_{2n+1} \qquad \text{d'après } Q_n \\ & = & F_{2n+2} \\ & = & F_{2(n+1)}, \text{ d'où } Q_{n+1}. \end{array}$$

(Remarque : l'égalité Q_0 équivaut à $0 = F_{2\cdot 0} - 1$, *i. e.* à $F_0 = 1$, ce qui est faux ; on ne pouvait donc pas initialiser un rang "plus tôt".)

(c) Montrons R_n par récurrence (simple) sur n.
On a les équivalences $R_1 \iff F_1^2 - F_0 F_2 = (-1)^{1+1} \iff 1^2 - 0 \cdot 1 = 1$, ce qui est vrai.
Soit $n \geq 1$ entier tel que R_n. On a alors

$$\begin{array}{rcl} F_{n+1}^2 - F_n F_{n+2} & = & F_{n+1}^2 - F_n (F_n + F_{n+1}) \\ & = & F_{n+1}^2 - F_n F_{n+1} - F_n^2 \\ & = & F_{n+1}^2 - F_n F_{n+1} - \left(F_{n-1} F_{n+1} + (-1)^{n+1}\right) \qquad \text{d'après } R_n \\ & = & F_{n+1}^2 - F_{n+1} \underbrace{(F_n + F_{n-1})}_{=F_{n+1}} - (-1)^{n+1} \\ & = & (-1)^{n+2}, \text{ d'où } R_{n+1}. \end{array}$$

8. Pour tout naturel n, on note P_n l'énoncé $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} > \frac{3n}{2n+1}$.
On a l'équivalence $P_2 \iff \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} > \frac{3\cdot 2}{2\cdot 2+1} \iff \frac{5}{4} > \frac{6}{5} \iff 5 \cdot 5 > 4 \cdot 6$, ce qui est vrai.
Soit $n \in \mathbf{N}^*$ tel que P_{n-1}. On a alors

$$\begin{array}{rcl} \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} & = & \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{(n-1)^2}\right) + \frac{1}{n^2} \\ & > & \frac{3(n-1)}{2(n-1)+1} + \frac{1}{n^2} \qquad \text{d'après } P_n \\ & = & \frac{3n^3 - 3n^2 + 2n - 1}{(2n-1)\, n^2}. \end{array}$$

Pour conclure à P_n, il suffit de montrer que le réel ci-dessus est plus grand (au sens large) que $\frac{3n}{2n+1}$, ce qui équivaut respectivement à

$$\begin{array}{rcl} \frac{3n^3 - 3n^2 + 2n - 1}{(2n-1)\, n^2} \geq \frac{3n}{2n+1} & \iff & \left(3n^3 - 3n^2 + 2n - 1\right)(2n+1) \geq 3n^3 (2n-1) \\ & \iff & 6n^4 - 3n^3 + n^2 - 1 \geq 6n^4 - 3n^3 \\ & \iff & n^2 \geq 1, \text{ ce qui est vrai puisque } n \in \mathbf{N}^*. \end{array}$$

9. Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on note P_n l'énoncé$\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \leq \frac{2n+1}{n+2}$.
L'énoncé P_1 équivaut à $1 \leq \frac{2\cdot 1+1}{1+2}$, ce qui est vrai. (On initialise un rang avant ce qui est demandé car l'initialisation est possible et plus facile.)
Soit $n \geq 2$ un entier tel que P_{n-1}. On a alors

$$\begin{array}{rcl} \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) & = & \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{(n-1)^2}\right) \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \\ & \leq & \frac{2(n-1)+1}{(n-1)+2} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \qquad \text{d'après } P_{n-1} \\ & = & \frac{2n-1}{n+1} \frac{n^2+1}{n^2}. \end{array}$$

Pour conclure à P_n, il suffirait de montrer que le réel ci-dessus est inférieur ou égal à $\frac{2n+1}{n+2}$, ce qui équivaut respectivement à

$$\begin{aligned}
\frac{2n-1}{n+1}\frac{n^2+1}{n^2} \leq \frac{2n+1}{n+2} &\iff (2n-1)(n+2)\left(n^2+1\right) \leq (2n+1)(n+1)n^2 \\
&\iff \left(2n^2+3n-2\right)+\left(2n^4+3n^3-2n^2\right) \leq 2n^4+3n^3+n^2 \\
&\iff 0 \leq n^2-3n+2 \\
&\iff 0 \leq (n-1)(n-2)\text{, ce qui est vrai puisque } n \geq 2.
\end{aligned}$$

10. Pour tout entier $k \in \mathbf{N}^*$, on note J_k l'énoncé

$$\forall(\Lambda_1, \Lambda_2, ..., \Lambda_k) \in I^k,\ \Lambda_1+\Lambda_2+\cdots+\Lambda_k = 1 \Longrightarrow f(\Lambda_1 a_1+\Lambda_2 a_2+\cdots+\Lambda_k a_k) \leq \Lambda_1 f(a_1)+\Lambda_2 f(a_2)+\cdots+\Lambda_k f(a_k).$$

Soit $(\lambda) \in [0,1]^1$ tel que $\lambda = 1$: on a alors $f(\lambda a_1) = f(a_1) \leq \lambda f(a_1)$, ce qui montre J_1.

Soit $k \in \mathbf{N}^*$ un entier tel que J_k. Soient $(p_0, p_1, ..., p_k) \in [0,1]^{k+1}$ tel que $p_0+p_1+\cdots+p_k = 1$. On a alors

$$\begin{aligned}
f(p_0a_0+p_1a_1+\cdots+p_ka_k) &= f\left(p_0a_0+(1-p_0)\frac{p_1a_1+p_2a_2+\cdots+p_ka_k}{p_1+p_2+\cdots+p_k}\right) \qquad \text{car } p_0+(p_1+\cdots+p_k) = 1 \\
&\leq p_0f(a_0)+(1-p_0)f\left(\frac{p_1a_1+p_2a_2+\cdots+p_ka_k}{p_1+p_2+\cdots+p_k}\right) \\
&\ \text{par hypothèse sur } f \text{ (les réels } p_0 \text{ et } 1-p_0 \text{ sont bien positifs et de somme 1)} \\
&= p_0f(a_0)+\underbrace{(1-p_0)}_{\text{positif car } p_0\leq 1}f\left(\frac{p_1}{1-p_0}a_1+\frac{p_2}{1-p_0}a_2+\cdots+\frac{p_k}{1-p_0}a_k\right) \\
&\leq p_0f(a_0)+(1-p_0)\left(\frac{p_1}{1-p_0}f(a_1)+\frac{p_2}{1-p_0}f(a_2)+\cdots+\frac{p_k}{1-p_0}f(a_k)\right) \\
&\ \text{d'après } J_k \text{ où l'on a remplacé } \Lambda_i \leftarrow \frac{p_i}{1-p_0} \text{ pour tout } i \\
&= p_0f(a_0)+p_1f(a_1)+\cdots+p_kf(a_k)\text{, ce qui montre } J_{k+1}.
\end{aligned}$$

On a donc montré $\forall m \in \mathbf{N}^*,\ J_m$, d'où l'on tire J_n, duquel on déduit, en y remplaçant $\Lambda_i \leftarrow \lambda_i$ pour tout $i \in \{1,2,...,n\}$, la comparaison souhaitée.

11. Pour tout entier k, notons $a_k := 9^{k+3}-2^k$ et $b_k := 9^{k+2}-2^k$ (A_k (resp. B_k) signifient alors que a_k (resp. b_k) est un multiple de 7).

Soit $n \geq 0$ un entier tel que A_n. On a alors

$$a_{n+1} = 9^{(n+1)+3}-2^{n+1} = (7+2)\,9^{n+3}-2\cdot 2^n = \underbrace{7\cdot 9^{n+3}}_{\in 7\mathbf{Z}}+\underbrace{2a_n}_{\in 7\mathbf{Z}\text{ d'après } A_n} \in 7\mathbf{Z}\text{, d'où } A_{n+1}.$$

On montrerait exactement de même que $\forall p \in \mathbf{N},\ B_p \Longrightarrow B_{p+1}$.

Soit $m \in \mathbf{N}$. Le calcul précédent (en remplaçant n par m) peut se réécrire

$$\begin{aligned}
2a_m &= a_{m+1}-9^{m+3}7, \qquad \textit{i. e.} \text{ (en multipliant par } -10) \\
(1-21)\,a_m &= 9^{m+3}70-10a_{m+1}, \qquad \text{ce qui équivaut (isoler } a_m) \text{ à} \\
a_m &= 7\left(9^{m+3}10+3a_m\right)-10a_{m+1},
\end{aligned}$$

ce qui permet de montrer l'implication $A_{m+1} \Longrightarrow A_m$, d'où l'équivalence $A_m \Longleftrightarrow A_{m+1}$. On procéderait exactement de même pour montrer $B_{m+1} \Longrightarrow B_m$.

Vu les équivalences montrées, on peut affirmer les deux équivalences

$$(\forall n \in \mathbf{N},\ A_n) \Longleftrightarrow (\exists n \in \mathbf{N},\ A_n) \text{ et } (\forall n \in \mathbf{N},\ B_n) \Longleftrightarrow (\exists n \in \mathbf{N},\ B_n).$$

Or on a

$$\begin{aligned}
a_0 &= 9^{0+3}-2^0 = 9^3-1 = 81\times(10-1)-1 = 728 = 700+28 = 7\times 104 \\
\text{et } g_0 &= 9^{0+2}-2^0 = 9^2-1 = 80 \notin 7\mathbf{Z},
\end{aligned}$$

ce qui montre que A_n est vrai et B_n faux pour tout naturel n.

Morale de l'exercice :

une récurrence NE PEUT se passer d'une INITIALISATION.

12. L'identité est solution, montrons par récurrence forte que c'est la seule solution.

Soit f une solution. Observons tout d'abord que f est injective : si a et b sont deux entiers ayant même image par f, on aura

$$a = \frac{f(f(f(a))) + f(f(a)) + f(a)}{3} = \frac{f(f(f(b))) + f(f(b)) + f(b)}{3} = b.$$

Pour tout entier $n \geq 0$, on note F_n l'énoncé $f(n) = n$.

On a $0 = 3\,\mathrm{Id}(0) = f(f(f(0))) + f(f(0)) + f(0)$, donc les trois entiers précédents sont nuls, d'où $f(0) = 0$ et F_0.

Soit $n \geq 1$ tel que $F_0, F_1, ..., F_{n-1}$. Puisque f est injective, $f(n)$ ne vaut aucune des valeurs $f(0), f(1), ..., f(n-1)$, donc (d'après $F_0, F_1, ..., F_n$) appartient à $\mathbf{N} \setminus \{0, 1, ..., n-1\}$, donc est au moins égal à n. Puisque $f(n) \notin \{0, 1, ..., n-1\}$, son image ne vaut aucune des valeurs $f(0), f(1), ..., f(n-1)$, d'où (par le même raisonnement) $f(f(n)) \geq n$ et l'on en déduirait la même comparaison pour $f(f(f(n)))$. Par somme, on obtient

$$3n = 3\,\mathrm{Id}(n) = \underbrace{f(n)}_{\geq n} + \underbrace{f(f(n))}_{\geq n} + \underbrace{f(f(f(n)))}_{\geq n} \geq 3n,$$

ce qui force l'égalité partout, en particulier $f(n) = n$, d'où F_n.

13. Pour tout entier naturel $\gamma \geq 1$, on note E_γ l'énoncé

$$\forall (s_1, ..., s_\gamma) \in [0,1]^\gamma, \quad \begin{array}{l} (1-s_1)(1-s_2)\cdots(1-s_\gamma) = 1 - (s_1 + s_2 + \cdots + s_\gamma) \\ \Longrightarrow \exists i \in \{1, 2, ..., n\}, \ \forall j \in \{1, 2, ..., n\} \setminus \{i\}, \ s_j = 0 \end{array}.$$

Soit $s \in [0,1]$ tel que $(1-s) = 1-(s)$. Puisqu'il n'y a d'autres s_i que $s_1 := s$, il est tautologique d'affirmer $\forall j \in \emptyset, \ s_j = 0$, ce qui montre E_1.

Soit $(s,t) \in [0,1]^2$ tels que $(1-s)(1-t) = 1-(s+t)$. En développant, l'égalité équivaut à $st = 0$, *i. e.* à ce que l'un des réels s ou t soit nul, ce qui montre E_2.

Soit $t \geq 2$ un entier tel que E_t et soit $(g_0, g_1, ..., g_t) \in [0,1]^{t+1}$ tels que $(1-g_0)(1-g_1)\cdots(1-g_t) = 1-(g_0+g_1+\cdots+g_t)$. Si $g_0 = 1$, l'hypothèse se réécrit $0 = -(g_1 + \cdots + g_t)$, ce qui force tous les g_i pour $1 \leq i \leq t$ à être nuls. Sinon, on a $g_0 \neq 1$ et l'on peut se ramener au rang précédent en écrivant

$$\begin{array}{rcll} 1-(g_1+\cdots+g_t) & \leq & (1-g_1)\cdots(1-g_t) & \text{d'après la question 5} \\ & = & \dfrac{(1-g_0)(1-g_1)\cdots(1-g_t)}{1-g_0} & \\ & = & \dfrac{1-(g_0+g_1+\cdots+g_t)}{1-g_0} & \\ & = & 1 - \dfrac{g_1+\cdots+g_t}{1-g_0} & \\ & \leq & 1-(g_1+\cdots+g_t) & \text{car } g_0 \in [0,1[, \end{array}$$

ce qui force la première égalité $1-(g_1+\cdots+g_t) = (1-g_1)\cdots(1-g_t)$, d'où l'on déduit par E_t qu'au plus un réel parmi $g_1, ..., g_t$ est non nul, mettons g_r. Alors l'hypothèse se réécrit $(1-g_0)(1-g_r) = 1-(g_0+g_r)$, d'où l'on tire (d'après E_2) que g_0 ou g_r est nul, ce qui conclut de montrer E_{t+1}.