Récurrence

(T. G. 10)

1. *Montrer l'égalité* $1+3+5+\cdots+(2p-1)=p^2$ *pour tout entier* $p\geq 0$.
2. *Soit* $(u_n)\in\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ *une suite complexe telle que* $\begin{cases} u_1=1 \\ \forall n\in\mathbf{N},\ \frac{u_{n+1}}{n+1}=u_1+u_2+\cdots+u_n \end{cases}$. *Montrer que* $u_k\geq k!$ *pour tout entier* $k\geq 1$.
3. *Soit* $x\geq -1$ *un réel. Montrer que* $(1+x)^n\geq 1+nx$ *pour tout entier naturel* n.
4. *Soit* $k\in\mathbf{N}$. *Montrer que* $1!1+2!2+\cdots+k!k=(k+1)!-1$.
5. *Soit* $n\in\mathbf{N}^*$. *Montrer la comparaison* $(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n)\geq 1-(a_1+a_2+\cdots+a_n)$ *pour tout* n*-uplet* $(a_1,...,a_n)\in[0,1]^n$.
6. *Soit* $(D_n)\in\mathbf{C}^{\mathbf{N}^*}$ *une suite complexe telle que* $\begin{cases} (D_1,D_2)=(0,1) \\ \forall n\geq 2,\ D_{n+1}=n\,(D_n+D_{n-1}) \end{cases}$. *Montrer que* $D_n=nD_{n-1}+(-1)^n$ *pour tout naturel* $n\geq 2$ *puis établir pour tout naturel* $k\geq 1$ *l'égalité*
$$\frac{D_k}{k!}=\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\cdots+\frac{(-1)^k}{k!}.$$
7. *Soit* $(F_n)\in\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ *une suite complexe telle que* $\begin{cases} (F_0,F_1)=(0,1) \\ \forall n\in\mathbf{N},\ F_{n+2}=F_{n+1}+F_n \end{cases}$. *Soit* $p\in\mathbf{N}^*$: *montrer les égalités*
$$\begin{aligned} F_1+F_2+\cdots+F_p &= F_{p+2}-1, \\ F_1+F_3+\cdots+F_{2p-1} &= F_{2p} \text{ et} \\ F_p^2-F_{p-1}F_{p+1} &= (-1)^{p+1}. \end{aligned}$$
8. *Montrer la comparaison* $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{s^2}>\frac{3s}{2s+1}$ *pour tout entier* $s\geq 2$.
9. *Montrer la comparaison* $\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{d^2}\right)\leq\frac{2d+1}{d+2}$ *pour tout entier* $d\geq 2$.
10. *Soit* I *un intervalle infini de* $\mathbf{R}$ *et* $f:I\longrightarrow\mathbf{R}$ *une fonction telle que*
$$\forall a,b\in I,\ \forall\lambda,\mu\geq 0,\ \lambda+\mu=1\Longrightarrow f(\lambda a+\mu b)\leq\lambda f(a)+\mu f(b).$$
Soient $n\in\mathbf{N}^*$, $(a_1,a_2,...,a_n)\in I^n$ *et* $(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n)$ *un* n*-uplets de réels positifs de somme* 1. *Montrer que*
$$f(\lambda_1a_1+\lambda_2a_2+\cdots+\lambda_na_n)\leq\lambda_1f(a_1)+\lambda_2f(a_2)+\cdots+\lambda_nf(a_n).$$
11. Pour tout entier q, on note A_q l'énoncé $9^{q+3}-2^q\in 7\mathbf{Z}$ et B_q l'énoncé $9^{q+2}-2^q\in 7\mathbf{Z}$ (les traduire en français !).
Montrer les équivalences $A_r\Longleftrightarrow A_{r+1}$ *et* $B_r\Longleftrightarrow B_{r+1}$ *pour tout naturel* r. *Quels énoncés sont vrais parmi*
$$\forall n\in\mathbf{N},\ A_n,\qquad \forall n\in\mathbf{N},\ B_n,\qquad \exists n\in\mathbf{N},\ A_n\qquad \text{et}\qquad \forall n\in\mathbf{N},\ B_n\ ?$$
12. *Trouver toutes les applications* $f:\mathbf{N}\longrightarrow\mathbf{N}$ *telles que* $f\circ f\circ f+f\circ f+f=3\,\mathrm{Id}$. (Hint : montrer que les solutions sont injectives.)
13. *Soient* $n\in\mathbf{N}^*$ *et* $(a_1,...,a_n)\in[0,1]^n$ *tels que* $(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n)=1-(a_1+a_2+\cdots+a_n)$. *Montrer que tous les* a_i *sont nuls sauf au plus un.*