Trigonométrie

(T. G. 1)

1. *Calculer les sinus, cosinus et tangente de tous les multiples entiers de* $\frac{\pi}{12}$*. On exprimera les résultats sous forme de sommes de radicaux d'entiers coefficientés par des rationnels (pas de radicaux emboîtés).* (On pourra combiner des tiers et des quarts pour obtenir un douzième.)

2. On veut calculer $\eta := \cos \frac{\pi}{5}$. On considère pour cela un triangle ABC isocèle en A, d'angles $\widehat{A} = \frac{\pi}{5}$ et $\widehat{B} = \frac{2\pi}{5} = \widehat{C}$. La bissectrice de l'angle $\widehat{B}$ coupe le coté $[AC]$ en D.

   (a) *Exprimer* BD *en fonction de* AB *et* η (on pourra introduire le pied de la hauteur issue de D dans le triangle ABD).

   (b) *Exprimer* AD *en fonction de* AB *et* CD *puis en fonction de* AB *et* η (on pourra utiliser une loi des sinus).

   (c) *En déduire une équation satisfaite par* η *que l'on résoudra.*

3. *Quels réels ont pour cosinus celui de leur triple ?*

4. *Déterminer tous les réels* κ *tels que* $\cos\left(3\kappa - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

5. *Y a-t-il des réels* τ *non multiples entiers de* π *tels que* $\tan(2\tau + 1) = \tan(\tau + 1)$ *?*

6. On considère un réel ρ. *Montrer l'égalité* $\frac{\sin\rho}{1+\cos\rho} = \tan\frac{\rho}{2} = \frac{1-\cos\rho}{\sin\rho}$ *et préciser pour quels* ρ *elle ne fait pas sens.*

7. *Exprimer les sinus, cosinus et tangente d'un réel donné en fonction de la tangente de sa moitié. On explicitera les valeurs du réel concerné pour lesquelles les identités trouvées n'ont pas de sens.*

8. *Pour quels réels* υ *a-t-on* $3\cos\upsilon + 2\sin^2\upsilon = 3$ *?*

9. *Trouver les réels dont la tangente vaut le cosinus.*

10. *Déterminer tous les réels* ν *vérifiant l'égalité* $\cos^2\nu - 2\cos\nu\sin\nu = 3\sin^2\nu$.

11. *Expliciter les réels* χ *tels que* $\sin^4\chi + \cos^4\chi = \sin\chi\cos\chi$.

12. (difficile) *Montrer que, parmi treize réels donnés, on peut en trouver deux (notons-les* Γ *et* Δ*) tels que* $0 \leq \frac{\Gamma-\Delta}{1+\Gamma\Delta} < 2-\sqrt{3}$.