Devoir surveillé 8

samedi 15 juin 2013

Solution proposée.

Exercice 1. **(7 pts)** On abrégera $\lambda := \ln 2$.

1. **(1 pt)** On reparamètre $x := 1 + t$ (d'où $dx = dt$), ce qui donne l'égalité $J_N = \int_{1+0}^{1+1} (\ln(x))^N \, dx$, *c. q. f. d.*.
2. **(2 pts)** On intègre par parties $\left\downarrow \begin{array}{cc} (\ln x)^N & dx \\ \frac{N}{x} (\ln x)^{N-1} \, dx & x \end{array} \right\uparrow$, ce qui donne les égalités
$$J_N = \left[(\ln x)^N x \right]_{x=1}^{2} - N \int_1^2 (\ln x)^{N-1} \, dx = 2\lambda^N - N J_{N-1},$$
d'où l'égalité demandé en isolant $N J_{N-1}$.
3. **(2 pts)** La fonction ln étant positive sur $[1, 2]$, ses puissances sont bien définies sur $[1, 2]$ et sont positives, d'où la positivité de J_N. On en déduit les comparaisons
$$J_{N-1} = \frac{2\lambda^N - J_N}{N} \leq \frac{2\lambda^N}{N} = o\left(\lambda^N\right), \text{ } c. \text{ } q. \text{ } f. \text{ } d..$$
4. **(2 pts)** La question précédente permet d'affirmer la négligeabilité $J_N = o\left(\lambda^{N+1}\right) = o\left(2\lambda^N\right)$, d'où l'équivalence $2\lambda^N - J_N \sim 2\lambda^N$. En divisant par N, il vient $J_{N-1} \sim \frac{2\lambda^N}{N}$, d'où les équivalences
$$J_N \sim \frac{2\lambda^{N+1}}{N+1} \sim \frac{2\lambda}{N} \lambda^N, \text{ ce qui répond à la question en posant } \binom{A}{B} := \binom{2 \ln 2}{\ln 2}.$$

Exercice 2 (5 pts). Soit $t \neq 0$. Toutes les comparaisons locales et tendances seront considérées lorsque $t \to 0$.

1. **(2 pts)** On a les égalités ("polarisées")
$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \lambda_i a_i^t &= \sum_{i=1}^N \lambda_i e^{t \ln a_i} = \sum_{i=1}^N \lambda_i \left(1 + t \ln a_i + o(t)\right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^N \lambda_i \right) + \left(\sum_{i=1}^N t \lambda_i \ln a_i \right) + \left(\sum_{i=1}^N o(t) \right) \\ &= 1 + t \sum_{i=1}^N \lambda_i \ln a_i + o(t). \end{aligned}$$

2. et 3. **(3 pts)** On a les égalités ("polarisées")
$$\ln \left(\sum_{i=1}^N \lambda_i a_i^t \right) = \ln \left(1 + t \sum_{i=1}^N \lambda_i \ln a_i + o(t) \right) = t \sum_{i=1}^N \lambda_i \ln a_i + o(t),$$
d'où les égalités ("polarisées") et tendance
$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^N \lambda_i a_i^t \right)^{\frac{1}{t}} &= \exp\left(\frac{1}{t} \ln \left(\sum_{i=1}^N \lambda_i a_i^t \right) \right) = \exp\left(\sum_{i=1}^N \lambda_i \ln a_i + o(1) \right) \\ &\xrightarrow[\text{est continue}]{\text{car exp}} \exp\left(\sum_{i=1}^N \lambda_i \ln a_i \right) = \prod_{i=1}^N \exp(\lambda_i \ln a_i) = \prod_{i=1}^N a_i^{\lambda_i}, \text{ } c. \text{ } q. \text{ } f. \text{ } d.. \end{aligned}$$

Exercice 3. **(10 pts)**

1. (a) **(1 pt)** Soit $b \in \mathbf{N}^*$. Il équivaut de dire $b \to \infty$ ou $\frac{1}{b} \to 0$, ce qui permet d'utiliser la dernière question de l'exercice précédent en écrivant

$$S(a,b) = \left(\sum_{i=1}^{a} \frac{1}{a} \left(1 + \frac{i}{a}\right)^{\boxed{\frac{1}{b}}} \right)^{\frac{1}{\boxed{\frac{1}{b}}}} \xrightarrow{b\to\infty} \prod_{i=1}^{a} \left(1 + \frac{i}{a}\right)^{\frac{1}{a}} = \sqrt[a]{\prod_{i=1}^{a} \left(1 + \frac{i}{a}\right)}, \textit{ c. q. f. d..}$$

(b) **(1 pt)** On a les égalités et tendance

$$\ln \sqrt[a]{\prod_{i=1}^{a} \left(1 + \frac{i}{a}\right)} = \sum_{i=1}^{a} \frac{1}{a} \ln \left(1 + \frac{i}{a}\right) \xrightarrow{a\to\infty} \int_0^1 \ln(1+t)\, dt \overset{u:=t+1}{=} \int_1^2 \ln u\, du, \textit{ c. q. f. d..}$$

(c) **(1 pt)** L'intégrale ci-dessus vaut

$$\int_1^2 \ln = [t \ln t - t]_{t=1}^2 = (2\ln 2 - 2) - (0 - 1) = 2 \ln 2 - 1,$$

donc $\sqrt[a]{\prod_{i=1}^{a} \left(1 + \frac{i}{a}\right)} = \exp \ln \sqrt[a]{\prod_{i=1}^{a} \left(1 + \frac{i}{a}\right)}$ tend (par continuité de exp) vers $e^{2\ln 2 - 1} = \frac{4}{e}$, *c. q. f. d..*

(a) **(1 pt)** On a les égalités et tendance

$$S(a,b)^{\frac{1}{b}} = \sum_{i=1}^{a} \frac{1}{a} \left(1 + \frac{i}{a}\right)^{\frac{1}{b}} \xrightarrow{a\to\infty} \int_0^1 (1+t)^{\frac{1}{b}}\, dt \overset{u:=t+1}{=} \int_1^2 \sqrt[b]{u}\, du,$$

d'où (par continuité de Id^b) la tendance $S(a,b) \xrightarrow{a\to\infty} \left(\int_1^2 \sqrt[b]{u}\, du \right)^b$, *c. q. f. d..*

(b) **(1 pt)** *Cf.* cours.

(c) **(1 pt)** Soit $n \in \mathbf{N}$. On a lorsque $n \to \infty$ les égalités ("polarisées")

$$2\sqrt[n]{2} - 1 = 2e^{\frac{\ln 2}{n}} - 1 = 2\left(1 + \frac{\ln 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - 1 = 1 + \frac{2\ln 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

(d) **(1 pt)** Soit $n \in \mathbf{N}$. On a lorsque $n \to \infty$ les égalités ("polarisées") et tendance

$$\left(2\sqrt[n]{2} - 1\right)^n = e^{n \ln\left(2\sqrt[n]{2} - 1\right)} = e^{n \ln\left(1 + \frac{2\ln 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{n\left(\frac{2\ln 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{2\ln 2 + o(1)} \longrightarrow e^{2 \ln 2} = 4.$$

(e) **(2 pts)** L'intégrale $\int_1^2 \sqrt[b]{u}\, du$ vaut $\left[\frac{u^{1+\frac{1}{b}}}{1+\frac{1}{b}} \right]_{u=1}^2 = \frac{2\sqrt[b]{2} - 1}{1 + \frac{1}{b}}$, donc le réel $\lim_{a\to\infty} S(a,b)$ vaut

$$\left(\int_1^2 \sqrt[b]{u}\, du \right)^b = \left(\frac{2\sqrt[b]{2} - 1}{1 + \frac{1}{b}} \right)^b = \frac{\left(2\sqrt[b]{2} - 1\right)^b}{\left(1 + \frac{1}{b}\right)^b} \xrightarrow{b\to\infty} \frac{4}{e}, \textit{ c. q. f. d..}$$

2. **(1 pt)** Poser par exemple $s : (x,y) \mapsto \frac{1}{1 + \frac{y}{x+1}}$. On a alors pour tout $(a,b) \in \mathbf{N}^2$ les tendances

$$\text{d'une part } s(a,b) = \frac{1}{1 + \frac{b}{a+1}} \xrightarrow{a\to\infty} \frac{1}{1+0} \xrightarrow{b\to\infty} 1,$$
$$\text{d'autre part } s(a,b) = \frac{1}{1 + \frac{b}{a+1}} \xrightarrow{b\to\infty} 0 \xrightarrow{a\to\infty} 0, \text{ ce qui conclut.}$$

Exercice 3. **(28.5 pts)** *Cf.* cours & T. G.

1. **0,5 pt** par question pour dire que l'intégrande est bien définie et continue.

(a) **(1,5 pt)** $\int_1^e \ln = 1.$

(b) **(1,5 pt)** $\int_0^{2\pi} e^{42\theta i} d\theta = 0.$

(c) **(1,5 pt)** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin}{\cos^3} = \frac{1}{2}.$

(d) **(2,5 pts)** $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{4}.$

(e) **(2,5 pts)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2r} \cos r \; dr = \frac{e^{\pi}-2}{5}.$

(f) **(2,5 pts)** $\int_{-2}^{0} \frac{dt}{t^2+t+1} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$

(g) **(3,5 pts)** $\int_0^{\frac{45}{8}} \frac{dz}{\sqrt{9+z^2}} = 2 \ln 2.$

2. **(1 pt)** $f(t) = f(0) + f'(0)\, t + \frac{f''(0)}{2} t^2 + \frac{f'''(0)}{3!} t^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} t^n + o(t^n).$

3. (a) **(1 pt)** $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24} + \frac{t^5}{120} + o\left(t^5\right).$

(b) **(1 pt)** $\sin t = t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120} + o\left(t^5\right).$

(c) **(2 pts)** $\sqrt{1-t} = 1 - \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} - \frac{t^3}{16} - \frac{5t^4}{128} - \frac{7t^5}{256} + o\left(t^5\right).$

(d) **(2 pts)** $-\ln(1-t) = t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{4} + \frac{t^5}{5} + O\left(t^5\right).$

(e) **(2 pts)** $\arcsin t = t + \frac{1}{6} t^3 + \frac{3}{40} t^5 + o\left(t^5\right).$

(f) **(2 pts)** $\operatorname{argth} t = t + \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + o\left(t^5\right).$

(g) **(3 pts)** $\tan t = t + \frac{t^3}{3} + \frac{2t^5}{15} + o\left(t^5\right).$